PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 5. 1. März 1907. Redaktionsschluß für No. 6 am 4. März 1907. 8. Jahrgang.

INHALT.

Originalmitteilungen:

M. Levin, Über einige Eigenschaften des Uraniums und Aktiniums. S 129.

K. E. F. Schmidt, Störungen in einem geerdeten Empfangssystem für drahtlose Telegraphie mit doppelter täglicher Periode. S. 133.

Mitteilungen aus dem physikalischen Institut der Universität Pisa: No. 31: R. Magini, Über den Einfluß der Ränder auf die elektrostatische Kapazität der Kondensatoren. S. 136.

H. Lorenz, Theorie der Kreiselräder auf Grund der Wirbelbewegung. S. 139.

G. Herglotz, Über das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen. S. 145.

F. Jüttner, Über den Zusammenhang der thermodynamischen Hypothese von Nernst mit dem Koppschen Gesetz. S. 147.

O. Sackur, Bemerkung zu vorstehender Abhandlung von F. Jüttner. S. 150.

Mitteilungen aus dem physikalischen Institut der Universität Bologna: No. 13: A. Bernini, Über die spezifische Wärme des Calciums und des Lithiums. S. 150.

K. v. Wesendonk, Über Entropie bei Körpern, deren Teile nicht im relativen Gleichgewichtszustande befindlich sind. S. 154.

Besprechungen:

P. Groth, Physikalische Kristallographie. S. 158.

O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. I2. II2. S. 159.

Annalen der Elektrotechnik für das Jahr 1906. S. 159.

M. J. Jamin, Lehrbuch der Physik. 3. Ergänzungsband. S. 159.

S. P. Thompson, Die dynamoelektrischen Maschinen. S. 160.

W. Bermbach, Der elektrische Strom. S. 160.

A. Still, Mehrphasige Ströme. S. 160.

Berichtigung. S. 160.

Personalien. S. 160.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über einige Eigenschaften des Uraniums und Aktiniums.

Von M. Levin.

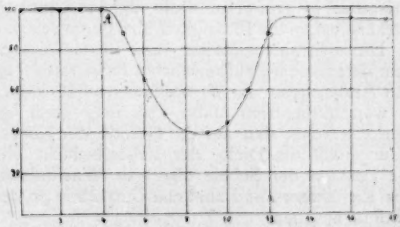
Die Aktivität des Uraniumnitrats.

Uraniumnitrat zeigt gleich nach der Kristallisation ein unregelmäßiges Verhalten seiner Aktivität, worauf Meyer und Schweidler[1]) zuerst aufmerksam gemacht haben. Die β-Strahlenaktivität eines frisch kristallisierten Präparates von Uraniumnitrat nimmt während des Verlaufes von etwa einer Woche ab, ohne später wieder zuzunehmen. Aus Versuchen von Godlewski[2]) geht hervor, daß dieses Verhalten von einer Diffusion des Uraniums-X herrührt. Das Nitrat von Uranium-X ist im Wasser leichter löslich als das Uraniumnitrat, und sammelt sich daher bei der Kristallisation in den zuletzt kristallisierenden Teilen an. Das Uranium-X diffundiert allmählich in die zuerst abgeschiedene Kristallmasse hinein; die β-Strahlen des Uranium-X erfahren daher mit der Zeit eine größere Absorption. Godlewski hat ferner gezeigt, daß man durch Abgießen der Mutterlauge eine weitgehende Trennung des Uranium-X vom Uranium herbeiführen kann.

In einer früheren Arbeit[3]) wurde mitgeteilt, daß bei einer Wiederholung der Versuche Godlewskis noch weitere Unregelmäßigkeiten beobachtet wurden. Nach fraktionierter Kristallisation nahm die Aktivität der Kristalle nicht, wie zu erwarten war, zu, sondern fiel allmählich ab. Es wurde die Vermutung ausgesprochen, daß die Abnahme der Aktivität durch Aufnahme von Wasserdampf aus der Atmosphäre und dadurch bedingte größere Absorption der Strahlen zu erklären wäre. Die Versuche, über die im folgenden berichtet wird, haben diese Vermutung bestätigt.

Ein Präparat von Uraniumnitrat, von dem dreimal die Mutterlauge abgegossen war, wurde gleich nach Beendigung der fraktionierten Kristallisation durch Erhitzen in das Oxyd übergeführt. Die α-Strahlenaktivität dieses Präparates blieb fast konstant, während die β-Strahlenaktivität nach der Periode von Uranium-X zu einem Maximum zunahm.

Ein anderes Präparat von Uraniumnitrat, das sich im Gleichgewicht befand, wurde vierzehn Tage lang in einem Exsikkator über Calciumchlorid aufbewahrt. Während dieser Zeit hielt sich die Aktivität konstant. Hierauf wurde das Calciumchlorid entfernt und das Glasgefäß mit Wasser beschickt. Schon am nächsten Tage war eine Veränderung sowohl der α-Strahlenaktivität wie der β-Strahlenaktivität zu bemerken.



In der Figur ist die Veränderung, die die β-Strahlenaktivität mit der Zeit erfuhr, wiedergegeben. In derselben bedeuten die Abszissen

1) Meyer und Schweidler, Wien. Ber., Juli 1904.
2) Godlewski, Phil. Mag. Sept. 1905.
3) Levin, diese Zeitschr. 7, 692, 1906.

die Zeit in Tagen, die Ordinaten die Aktivität, bezogen auf die Anfangsaktivität als 100. Die letzten fünf Tage der Periode, während derer sich das Präparat in der mit Calciumchlorid getrockneten Atmosphäre befand, sind in die Figur noch mit aufgenommen. Bei A wurde das Präparat in die mit Wasserdampf gesättigte Atmosphäre gebracht. Die Aktivität nimmt schnell ab und erreicht nach 4 Tagen ein Minimum. Diese Abnahme rührt zweifellos von der Aufnahme von Wasser durch die Kristalle und der dadurch hervorgerufenen größeren Absorption der Strahlen her. Wie aus der Figur ersichtlich ist, steigt dann die Aktivität schnell wieder an. Nach weiteren 6 Tagen wird ein Maximum erreicht und die Kurve fällt dann langsam ab.

Diese merkwürdige Erscheinung ist folgendermaßen zu erklären. Wenn die Aktivität ihr Minimum erreicht hat, ist so viel Wasser absorbiert, daß eine flüssige Phase auftritt, die sich infolge ihres geringeren spezifischen Gewichtes auf der Oberfläche der Kristallmasse ansammelt. Das Vorhandensein dieser Schicht ist bereits nach wenigen Tagen mit dem bloßen Auge zu erkennen. Die Zunahme der β-Strahlenaktivität rührt daher, daß das Uranium-X, welches, wie erwähnt, in Wasser leichter löslich ist, als das Uraniumnitrat, durch Diffusion in die flüssige Phase gelangt, und daher eine geringere Absorption der β-Strahlen stattfindet. Der weitere Abfall der Aktivität erklärt sich daraus, daß, nachdem der größte Teil des Uranium-X in die wässerige Lösung gelangt ist, eine noch weitere Aufnahme von Wasser und damit eine gesteigerte Absorption der β-Strahlen stattfindet.

Um für diese Erklärung noch einen weiteren Beweis zu erbringen, wurde die Flüssigkeit, die sich über den Kristallen befand, abgegossen, zur Trockne eingedampft, im Exsikkator aufbewahrt und von Zeit zu Zeit auf ihre Aktivität untersucht. Es fand sich, daß die β-Strahlenaktivität dieses Präparates allmählich mit der Periode von Uranium-X abnahm, woraus hervorgeht, daß das Uranium-X wirklich aus den Kristallen in größerem Maße als das Uraniumnitrat selbst, in die Flüssigkeit übergegangen war.

Die α-Strahlenaktivität eines in der Wasserdampfatmosphäre aufbewahrten Präparates folgt den Änderungen der β-Strahlenaktivität, jedoch in weit geringerem Maße. Es mag noch bemerkt werden, daß auf die Gestalt der Kurven naturgemäß die Dicke der Kristallschicht und die Position der Schale über der Wasserfläche des Exsikkators und ähnliche Umstände großen Einfluß ausüben.

Die Strahlungen des Uranium-X.

Die ersten Untersuchungen des Uranium-X wurden mit Hilfe der photographischen Methode ausgeführt. Sir William Crookes[1]) und Becquerel[2]) trennten das Uranium-X nach verschiedenen Methoden von dem Uranium ab, und beobachteten beide, daß die photographische Wirkung des Uraniums völlig verloren ging, wenn das Uranium-X aus ihm abgetrennt war, und daß das Uranium-X selbst eine stark photographische Wirkung zeigte, die jedoch mit der Zeit abnahm. Nach der elektrischen Methode erhält man jedoch gerade das umgekehrte Resultat. Die Erklärung dieser Beobachtungen wurde von Soddy[3]) und Rutherford und Grier[4]) gegeben. Die α-Strahlen des Uraniums sind photographisch fast unwirksam, bewirken aber den größten Teil der Ionisation in der Luft, während die β-Strahlen des Uranium-X anderseits stark auf die photographische Platte einwirken, aber nur ein geringes Ionisierungsvermögen besitzen.

Rutherford und Grier haben die Frage, ob Uranium-X neben den β-Strahlen auch α-Strahlen aussendet, eingehend untersucht, sie fanden jedoch, daß die α-Strahlenaktivität, die ihre Uranium-X-Präparate besaßen (zwischen 30 und 40 Proz.), dadurch erklärt werden konnte, daß dem Uranium-X noch ein wenig Uranium beigemischt war.

Schlundt und Moore[5]) haben neuerdings einige neue Methoden zur Abtrennung des Uranium-X gefunden, die erlauben, das Uranium-X fast rein darzustellen. Diese Methoden beruhen auf dem Unterschied der Löslichkeit des Uraniums und des Uranium-X in organischen Lösungsmitteln. Bei dem Verfolg der Abfallskurven des nach ihren Methoden dargestellten Uranium-X kamen sie zu dem Schluß, daß Uranium-X außer den β-Strahlen noch α-Strahlen aussendet.

Schlundt und Moore bestimmten das Verhältnis der α-Strahlenaktivität zur β-Strahlenaktivität dadurch, daß sie die Ionisation maßen, die zwischen zwei parallelen Platten durch ein Uranium-X-Präparat hervorgebracht wurde. Sie bedeckten dann das Präparat mit einem Stück Papier, dessen Dicke ausreichte, um die α-Strahlen vollständig zu absorbieren. Durch Abzug der so gemessenen β-Strahlenaktivität von der Gesamtaktivität erhielten sie Werte, die sie als α-Strahlenaktivität bezeichnen.

Diese Aktivität betrug zwischen 40 und 50 Proz. der Gesamtaktivität und blieb nicht konstant, wie zu erwarten gewesen wäre, wenn sie von Spuren des Uraniums hergerührt hätte, sondern nahm wie die β-Strahlenaktivität mit einer Periode von etwa 22 Tagen ab.

1) Crookes, Proc. Roy. Soc. **68**, 409, 1900.
2) Becquerel, C. R. **131**, 137, 1900; **133**, 977, 1901.
3) Soddy, Trans. Chem. Soc. **81**, 460, 1902.
4) Rutherford und Grier, Phil. Mag. Sept. 1902.
5) Schlundt und Moore, Phil. Mag. Oct. 1906.

Wenn bei den Versuchen von Schlundt und Moore der Abstand zwischen den Elektroden die übliche Größe von etwa 5 cm hatte, so würden die α-Strahlen voraussichtlich fast völlig absorbiert sein, während die β-Strahlen infolge ihres viel größeren Durchdringungsvermögens auf ihrem Wege durch die Luftschicht nur einen kleinen Teil ihrer Energie durch Ionisation verlieren würden. Die von Schlundt und Moore gewählte Versuchsanordnung gibt daher nur einen angenäherten Aufschluß über das wahre Verhältnis der α-Strahlenaktivität zur β-Strahlenaktivität des Uranium-X. Zieht man das größere Durchdringungsvermögen der β-Strahlen in Betracht, so folgt, daß dieses Verhältnis erheblich kleiner als 1 sein muß. Die α-Partikeln der radioaktiven Substanzen sind im allgemeinen viel wirksamere Ionisatoren als die β-Strahlen. Das Verhältnis der α-Strahlenaktivität zur β-Strahlenaktivität ist bei den anderen einheitlichen radioaktiven Substanzen, die zugleich α- und β-Strahlen aussenden, ungefähr $= 100$.

Der geringe Wert, den Schlundt und Moore für dieses Verhältnis bei dem Uranium-X gefunden haben, würde sich jedoch sofort erklären lassen, wenn die α-Strahlen des Uranium-X in Luft von Atmosphärendruck einen Ionisierungsbereich von nur einem Bruchteil eines Millimeters besäßen.

Um eine möglichst geringe Absorption der α-Strahlen in der aktiven Schicht selbst zu haben, ist es erforderlich, das Uranium-X möglichst frei von Verunreinigungen herzustellen. Bei dem Verfahren von Schlundt und Moore erhält man die besten Ausbeuten, wenn man der Lösung des Urannitrats in einem organischen Lösungsmittel, z. B. Aceton, etwas frisch gefälltes Ferrihydroxyd zusetzt, welches dazu dient, das Uranium-X niederzureißen; man erhält nach dieser Methode das Uranium-X also nicht in dünner Schicht. — Die in folgendem beschriebenen Versuche wurden daher zum größten Teil mit Präparaten von Uranium-X ausgeführt, die nach einer früher von dem Verfasser[1]) beschriebenen Methode hergestellt waren. Diese besteht darin, daß man eine Lösung von Uraniumnitrat mit Ruß oder Tierkohle kocht. Das Uranium-X wird hierbei von der Kohle absorbiert, und nach Veraschung der Kohle erhält man das Uranium-X verhältnismäßig frei von Verunreinigungen.

Der Ionisierungsbereich der α-Strahlen wurde in einem α-Strahlenelektroskop der üblichen Form bestimmt. Der Porzellandeckel, welcher das Uranium-X enthielt, wurde nacheinander mit verschiedenen Schichten von Aluminiumfolie von je 0,0003 cm Dicke bedeckt und die verbleibende Ionisation gemessen. Trägt man in einem Diagramm als Abszissen die Zahl der Aluminiumfolien ein, als Ordinaten die Logarithmen der Aktivitäten, so erhält man nach Verwendung von fünf Aluminiumfolien eine gerade Linie, die den Verlauf der Absorption der β-Strahlen darstellt. Aus diesen Versuchen geht hervor, daß die α-Strahlen imstande sind, etwa fünf Aluminiumfolien zu durchdringen. Durch frühere Versuche war bestimmt worden, daß das Absorbierungsvermögen einer Aluminiumfolie dem von einer Luftschicht von einem halben Zentimeter Dicke entsprach. Unter Berücksichtigung der Tiefe des Porzellandeckels würde sich ergeben, daß die α-Strahlen in Luft von Atmosphärendruck einen Ionisierungsbereich von etwa 3 cm haben würden.

Diese Größe entspricht dem Werte, den wahrscheinlich die α-Strahlen des Uraniums selbst besitzen. Es war daher noch der Nachweis zu führen, daß die α-Strahlenaktivität nicht von Verunreinigungen durch Uranium herrührte. In diesem Falle hätte die α-Strahlenaktivität konstant bleiben müssen; sie nahm jedoch, wie Schlundt und Moore gleichfalls gefunden hatten, in demselben Verhältnis wie die β-Strahlenaktivität ab. Die Ionisation, die zwischen den Elektroden von $5\,^1/_2$ cm Abstand durch die α-Strahlen hervorgebracht wurde, betrug zwischen 25 und 35 Proz. der Gesamtionisation. Diese Werte wurden durch Extrapolation des exponentiellen Teiles der Absorptionskurve bis zur Ordinatenachse gewonnen.

Nachdem die Abnahme der Aktivitäten etwa einen Monat lang verfolgt war, wurde der Verlauf der Strahlen in einem magnetischen Felde untersucht. Zu diesem Zwecke wurde das Präparat zwischen die Pole eines kräftigen Elektromagneten gebracht, auf die ein Elektroskop der von Wilson[1]) angegebenen Art montiert war. Der Ionisationsraum bestand aus einem Kupferzylinder von 10 cm Höhe und 7 cm Durchmesser. Ein zentral angebrachter Messingstab war mit dem Goldblattsystem verbunden. Der Boden des Gefäßes bestand aus einem Drahtnetz.

Die Versuche wurden in der folgenden Weise ausgeführt. Es wurde zunächst die Ionisation bestimmt, die ein Präparat, ohne daß der Magnet erregt war, im unbedeckten Zustande hervorrief, und wenn es mit fünf Aluminiumfolien bedeckt war. Bei einem Abstande des Präparates vom Drahtnetz von 1,5 cm fand sich auf diesem Wege für die α-Strahlenaktivität 34 Proz. der Gesamtaktivität.

Hierauf wurde die Aktivität bestimmt, die das Präparat zeigte, wenn es unbedeckt und das Magnetfeld erregt war. Diese Aktivität betrug nur etwa 19 Proz. der Gesamtaktivität.

1) Levin, diese Zeitschr. 7, 694, 1906.

1) Rutherford, Radioaktivität 1907, S. 89.

Um die Ionisation zu bestimmen, die bei erregten Magneten von den γ-Strahlen und etwa nicht völlig abgelenkten β-Strahlen herrührte, wurde das Präparat wiederum mit Aluminiumfolie bedeckt und das Magnetfeld erregt. Es fand sich, daß etwa 16 Proz. der Aktivität von unabgelenkten β-Strahlen und γ-Strahlen herrührten; oder daß bei unbedecktem Präparat und erregtem Magnetfelde mindestens 10 Proz. der Ionisation durch diese Strahlen hervorgebracht wurden.

Da das Magnetfeld nicht stark genug war, um die α-Strahlen merklich abzulenken, so geht aus diesen Versuchen hervor, daß nicht 34 Proz. der Aktivität, sondern höchstens 8 Proz. von α-Strahlen herrühren.

Die Versuche wurden mit verschiedenen Präparaten und unter Variierung des Abstandes zwischen dem aktiven Präparat und dem Boden des Elektroskops wiederholt und ergaben in jedem Falle, daß der Beitrag der α-Strahlen zur Gesamtionisation geringer war als 10 Proz.

Die Erklärung dieser Erscheinungen dürfte die sein, daß die von Schlundt und Moore beobachteten, leichter absorbierbaren Strahlen keine α-Strahlen, sondern die sekundären β-Strahlen sind, die die primären β- und γ-Strahlen des Uranium-X auf dem Boden der Schale oder innerhalb der aktiven Schicht hervorrufen. Hierdurch würde erklärt werden, daß die Ionisation, die diese Strahlen hervorbringen, von der Größenordnung derer ist, die von β-Strahlen erzeugt werden, daß die Strahlen im Magnetfelde leicht ablenkbar sind, und daß ihre Intensität mit der Periode des Uranium-X abnimmt.

Über die Elektrolyse der Aktiniumprodukte.

In einer früheren Arbeit[1]) ist mitgeteilt worden, daß aus sauren Aktiniumlösungen durch die Elektrolyse zwischen Platinelektroden nur Aktinium-A und Aktinium-B abgeschieden werden können, und zwar das zweite leichter als das erste. Aus ammoniakalischen Lösungen von Aktinium-X erhält man neben Aktinium-A und -B auch Aktinium-X.

Einige Unregelmäßigkeiten, die bei den Abfallskurven des elektrolytisch dargestellten Aktinium-X beobachtet waren, wurden im Verlaufe der vorliegenden Untersuchung eingehender verfolgt. Weist man das Aktinium-X einmal nach der Emanationsmethode, das andere Mal durch Beobachtung seiner Zerfallskurve nach, so erhält man zuweilen einander sich widersprechende Angaben. Die Abfallskurven zeigen bisweilen ein unregelmäßiges Verhalten, indem die Aktivität nicht abnimmt, sondern manchmal mehrere Wochen lang konstant bleibt und manchmal auch zunimmt.

Dieses Verhalten rührt nicht etwa daher, daß dem Aktinium Radium beigemischt wäre, denn ein Präparat, dessen Aktivität stark zugenommen hatte, gab Radiumemanation nur in unmeßbarer Menge ab. Das Anwachsen der Aktivität ist vielmehr so zu erklären, daß mit dem Aktinium-X noch Aktinium selbst oder Radioaktinium abgeschieden werden. Es wurde früher (l. c.) gezeigt, daß man durch Ammoniakfällungen das Radioaktinium von dem Aktinium trennen kann. Fällt man ein Aktiniumpräparat mit Ammoniak, so geht in der Regel nur ein Teil des Aktiniums in den Niederschlag über, während der Rest in der Lösung verbleibt. Wie gezeigt wurde, wird Aktinium und Radioaktinium aus schwachsauren oder alkalischen Lösungen durch die Elektrolyse an der Kathode abgeschieden. Die Spuren von Aktinium, die in einer Lösung noch vorhanden sind, die selbst drei- oder viermal mit Ammoniak gefällt worden ist, werden durch den Strom zugleich mit dem Aktinium-X abgeschieden. Dieses wurde dadurch bewiesen, daß sich in Präparaten, deren Aktivität konstant geblieben war oder zugenommen hatte, noch nach 2—3 Monaten große Mengen von Aktiniumemanation nachweisen ließen. Man erhält daher das Aktinium-X elektrolytisch nur dann rein, wenn Aktinium und Radioaktinium aus der Lösung vorher entfernt sind.

Um die Abscheidung der Aktiniumprodukte auf Metallen zu untersuchen, wurden Bleche von Zink, Blei, Kupfer und Silber in ammoniakalische und saure Lösungen von Aktinium-X getaucht. Aus den sauren Lösungen scheiden diese Metalle mit Ausnahme des Silbers Aktinium-A ab. Da Aktinium-B edler ist als Aktinium-A, so sollte man erwarten, daß auch Aktinium-B abgeschieden würde. Aktinium-B ließ sich jedoch in keinem Falle mit Sicherheit nachweisen. Die Periode von Aktinium-B beträgt nur zwei Minuten. Um nachweisbare Mengen von Aktinium-B zu erhalten, ist es daher erforderlich, daß in der Zeiteinheit auf dem Metall eine größere Menge von Aktinium-B niedergeschlagen wird, als durch den Zerfall verschwindet. Diese Bedingung war offenbar in den meisten Fällen nicht erfüllt. Bei Verwendung von Zink in sehr stark sauren Lösungen erfolgte jedoch die Abnahme der Aktivität anfangs schneller als der Periode von Aktinium-A entspricht, was auf das Vorhandensein von Aktinium-B schließen läßt. Es wurde ferner niemals im Anfange der Versuche ein Anstieg der Aktivität beobachtet, wie er zu erwarten gewesen wäre, wenn gar kein Aktinium-B abgeschieden worden wäre. Aus ammoniakalischen Lösungen fällen alle vier Metalle, auch Silber,

1) Levin, diese Zeitschr. 7, 812, 1906.

Aktinium-*A* aus. Aktinium-*X* wird durch Blei aus sauren Lösungen abgeschieden. Es findet sich jedoch nicht auf dem Blei selbst, sondern in der Schicht von Bleinitrat oder Bleichlorid, mit der sich das Blei überzieht. Aus ammoniakalischen Lösungen scheidet Zink das Aktinium-*X* in großen Mengen ab, während Blei, Kupfer und Silber nach dem Zerfall des Aktinium-*A* nur eine geringe Aktivität von Aktinium-*X* behalten. Auch auf den Metallen finden sich wie bei der Elektrolyse häufig Restaktivitäten, die von Aktinium oder Radioaktinium herrühren.

Abscheidung von Radioaktinium und Thorium-*B* mit Hilfe von Tierkohle.

Kocht man eine Lösung von Uraniumnitrat mit Tierkohle, so erhält man, wie oben erwähnt wurde, eine Abscheidung des Uranium-*X* mit der Kohle. Auch zur Trennung von Aktiniumprodukten läßt sich die Tierkohlemethode verwenden. Filtriert man eine salpetersaure Lösung von Aktinium, die mit Tierkohle gekocht worden ist, ab, so erhält man mit der Kohle geringe Mengen von Aktinium-*X* abgeschieden und große Mengen von Radioaktinium. Das Aktinium-*X* wurde mit Hilfe der Emanationsmethode nachgewiesen. Daß Radioaktinium vorhanden war, ergab sich aus der Veränderung, die die Aktivität mit der Zeit erfuhr. Wie Hahn[1]) nachgewiesen hat, nimmt die Aktivität des Radioaktiniums infolge der Bildung von Aktinium-*X* und seiner Umwandlungsprodukte zunächst zu, erreicht nach etwa 20 Tagen ein Maximum und nimmt dann schließlich mit einer Periode von etwa 20 Tagen ab. Das gleiche Verhalten zeigt das mit Hilfe der Tierkohle gewonnene Präparat. Die Trennung des Radioaktiniums vom Aktinium erfolgt bereits nach einmaligem Kochen mit Tierkohle weitgehend.

In einer Lösung von Thoriumnitrat reißt die Kohle neben einer gewissen Menge von Thorium einen großen Betrag von Thorium-*B* nieder. Die Aktivität fällt zunächst mit der Periode von Thorium-*B* auf wenige Prozent ihres Anfangswertes und nimmt dann allmählich infolge der Neubildung von Thorium-*X* bis zur Erreichung des Gleichgewichtszustandes zu.

Es werden somit durch Tierkohle nicht alle radioaktiven Substanzen gleichmäßig adsorbiert, sondern das Adsorptionsvermögen der Tierkohle beschränkt sich wesentlich auf Uranium-*X*, Radioaktinium und Thorium-*B*.

Ich danke Herrn Professor J. J. Thomson bestens für sein Interesse an dieser Arbeit und für die Freundlichkeit, mit der er mir die Hilfsmittel seines Laboratoriums zur Verfügung gestellt hat.

Cambridge, Cavendish Laboratory, 24. Jan. 07.

(Eingegangen 27. Januar 1907.)

1) Hahn, diese Zeitschr. **7**, 855, 1906.

Störungen in einem geerdeten Empfangssystem für drahtlose Telegraphie mit doppelter täglicher Periode.

Von K. E. F. Schmidt.

Auf die im folgenden mitgeteilten Beobachtungen wurde ich geführt, als ich den Einfluß des Sonnenlichtes auf die Ausbreitung elektrischer Wellen zu ermitteln suchte.

Ein etwa 80 m langer Luftleiter war mit seinem oberen gut isolierten Ende 41 m über dem Erdboden unter Benutzung des Turmes des hiesigen physikalischen Instituts frei über den vor dem Institut liegenden Platz abgespannt und war über eine Abstimmspule, einen hochempfindlichen Barretter und eine Leydener Flasche von ca. 2000 cm Kapazität an die städtische Wasserleitung angeschlossen.

Mit diesem Empfangssystem wurden die Wellen meiner 3,5 km entfernt liegenden Sendestation aufgefangen.

Es zeigten sich schon bei den ersten Beobachtungen merkwürdige Schwankungen in der Stärke der Empfangswirkung, trotzdem von der Sendestation Wellen mit gleichbleibender Intensität ausgesandt wurden; diese Schwankungen traten zunächst um Mitternacht auf.

Um die Erscheinung weiter zu verfolgen, wurden zu vier verschiedenen Zeiten — zwischen 5 und 7 Uhr morgens und nachmittags und 10—2 Uhr mittags und nachts — an verschiedenen Tagen möglichst viel Punkte der Resonanzkurven aufgenommen und zwar

A. nachts zwischen 10 und 2 am 19./20. IV. 06 und 21./22. IV. 06
mittags zwischen 10 und 2 am 20. IV. 06 und 21. IV. 06

B. morgens zwischen 5 und 7 am 20. IV. 06
nachmittags zwischen 5 und 7 am 20. IV. 06 und 21. IV. 06.

Ein Teil der Beobachtungsresultate ist in Fig. 1 u. 2 graphisch dargestellt. Als Abszissen sind die Kontakte der Abstimmspule aufgezeichnet; die Längen der Abszissen können sehr nahe proportional den Koeffizienten der Selbstinduktion der dem Empfangskreis zugeschalteten Teile der Abstimmspule gesetzt werden. Als Ordinaten sind aufgetragen die Ausschläge des Galvanometers in der Barretterschaltung. Die Punkte sind der Deutlichkeit halber teilweise seitlich der zu dem betreffenden Kontakt gehörigen Ordinate gezeichnet.

Die Kurven der Gruppe *B* unterscheiden sich dadurch wesentlich von denen der Gruppe *A*,

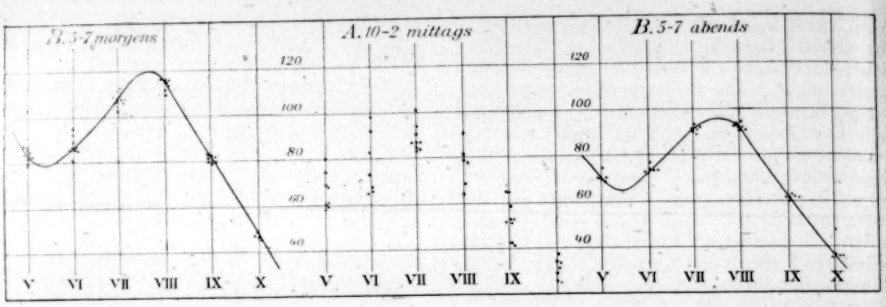


Fig. 1. Resonanzkurven eines geerdeten Systems ermittelt zwischen 5—7 morgens, 10—2 mittags, 5—7 abends.

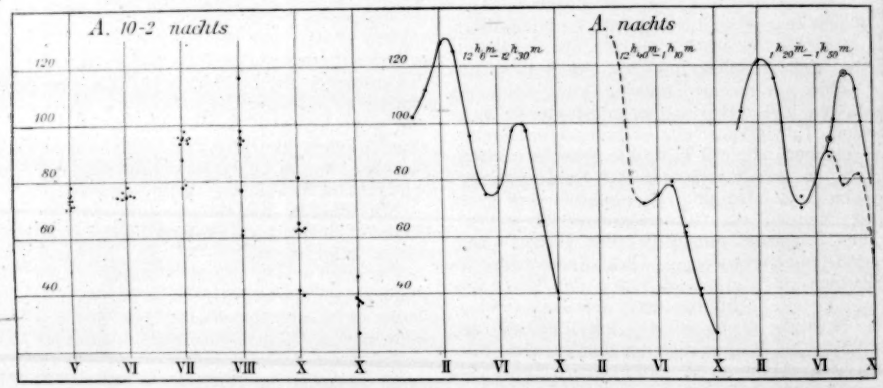


Fig. 2. Punkte der Resonanzkurve ermittelt 10—2 nachts. Die Störung des Kurvenbildes zwischen 12 u. 2 nachts.

daß die zum gleichen Abszissenwert gehörenden Kurvenpunkte bei B weit geringere Schwankungen in den Ordinatenwerten aufweisen als bei *A*. Durch die Beobachtungspunkte der *B*-Gruppe läßt sich ein wohldefinierter Kurvenzug legen; dagegen ist dies bei der *A*-Gruppe nicht möglich. Bemerkenswert sind die Mitternachtsbeobachtungen vom 21./22. IV. Von 10—12 zeigen sich nur unwesentliche Schwankungen, von da ab beginnen die Störungen und wurden bis 2 Uhr verfolgt.

Für diese Zeit sind die Resonanzkurven noch besonders verzeichnet (Fig. 2) und zwar für beide Maxima; man erkennt deutlich, daß die Beobachtungen fortwährend sich verändernde Bilder der Resonanzkurven ergeben.

Der Nachweis, daß lediglich der zwecks Erdung der Empfangssysteme benutzte Anschluß an die Wasserleitung die Störungen hervorrief, konnte durch Parallelversuche mit einem Gegengewicht nach Braun erbracht werden. Dieses Gegengewicht bestand aus einem 80 m langen Draht (Symmetriedraht), der in Zickzackführung im Schutze der Südfront des Instituts ausgespannt war. Das im Laboratorium befindliche Ende des Drahtes war an eine gleichgestaltete Abstimmspule wie der Aufnahmedraht angeschlossen und es wurde dafür gesorgt, daß der Barretter stets im Strombauch der Schwingung blieb.

Fig. 3 gibt die Meßresultate für diese Anordnung. Man erkennt sofort, daß jetzt auch für die Zeit von 10—2 Uhr nachts die Beobachtungspunkte nur ganz unwesentliche Abweichungen voneinander zeigen. Das gleiche Resultat ergaben mittags zwischen 11 und 2 Uhr angestellte Untersuchungen; die Störungen treten also in der Empfangsanordnung mit Gegendraht nicht auf.

Die Zunahme der Empfangswirkung, welche in den Beobachtungen um Mitternacht gegenüber den vor Sonnenuntergang angestellten zutage tritt, ist eine Wirkung des nach Sonnenuntergang eingetretenen Rückgangs der Luftionisation.

Die gute Übereinstimmung der Empfangs-

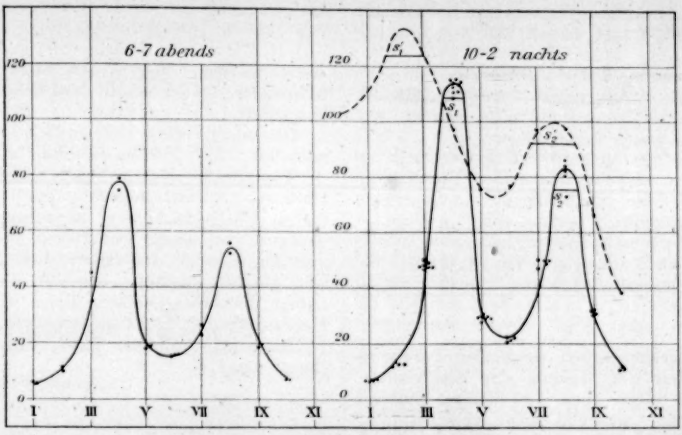


Fig. 3. Resonanzkurven eines Empfangssystems mit Gegendraht (die gestrichelte Kurve gilt für das geerdete System).

werte bei dieser Anordnung liefert gleichzeitig den Nachweis, daß die Sendestation unter den getroffenen Schaltungs- und Meßanordnungen Wellen von praktisch konstanter Intensität auszusenden ermöglicht; da die Beobachtungen ununterbrochen bis zu 4 Stunden ausgedehnt wurden, so ist damit auch ein Beweis für die Zuverlässigkeit der Anlage gegeben.

Daß auch bei den Versuchen mit dem Gegendraht einige Punkte merklicher von der Kurve abliegen, erkläre ich dadurch, daß der die Wechselstrommaschine der Sendestation antreibende Motor durch plötzliche Änderungen der Netzspannung Schwankungen in der Tourenzahl erleidet. Dadurch wird auch der den Induktor speisende Wechselstrom momentane Änderungen erfahren und damit die Intensität der ausgestrahlten Welle.

Solche Spannungsschwankungen kommen selten, aber doch hin und wieder vor und sind unvermeidlich, da die stromliefernde Zentrale nur eine Dampfmaschine, allerdings mit vorzüglichem Gleichförmigkeitsgrade, aber keine Pufferbatterie hat. Die elektrische Energie wird zum Antrieb einer Papierfabrik benutzt, deren Motore, wenn zufällig gleichzeitig mehrere anlaufen, naturgemäß Schwankungen der Netzspannung erzeugen.

Die Resultate geben zunächst eine neue Bestätigung des Braunschen Satzes, daß eine genaue Abstimmung zweier Schwingungssysteme bei künstlicher Erdung mit großen Unsicherheiten verknüpft ist.

Ferner geht aus ihnen hervor, daß die Dämpfung im Empfangskreise bei Benutzung eines Gegengewichts merklich verringert wird. Vergleicht man Fig. 3, die ausgezogene Kurve — Empfang mit Gegengewicht — mit der gestrichelten Kurve — Empfang mit Erdung —, so sieht man, daß bei letzterer symmetrisch liegende Kurvenpunkte einen bedeutend größeren Abstand, s_1 und s'_1 sowie s_2 und s'_2, zeigen, wodurch bekanntlich die stärkere Dämpfung gekennzeichnet ist.

Das Hauptinteresse der Versuche liegt in dem Umstand, daß die Störungen des geerdeten Empfangskreises zwei Perioden am Tage aufweisen, deren Verlauf auf Grund der bisherigen Beobachtungen etwa durch die Kurve *a* (Fig. 4) skizziert ist.

Eine Möglichkeit der Erklärung für die Störungen gibt die Annahme, daß die als Erde benutzte Wasserleitung und ihre Umgebung periodisch veränderliche elektrische Ladungen erhält. Solche könnten durch den Erdstrom erzeugt sein, dessen Intensitätsschwankung nach B. Weinstein[1]) eine doppelte tägliche Periode aufweist. Da aber ein zeitliches Zusammenfallen mit den Perioden der beobachteten Störungen nicht vorhanden ist, so dürfte ein Zusammenhang beider Phänomene ausgeschlossen sein.

Ein besserer zeitlicher Zusammenhang ergibt sich zwischen den Perioden unseres Phänomens und den Perioden der Elektrizitätszerstreuung, so wie sie Zölß ableitete.[2]) Der tägliche Gang dieser Erscheinung stellt sich nach seinen Mitteilungen durch die Kurve *b* (Fig. 4) dar.

---

1) B. Weinstein, Die Erdströme im deutschen Telegraphengebiet. Braunschweig 1900.

2) Diese Zeitschr. **5**, 106—108, 1904.

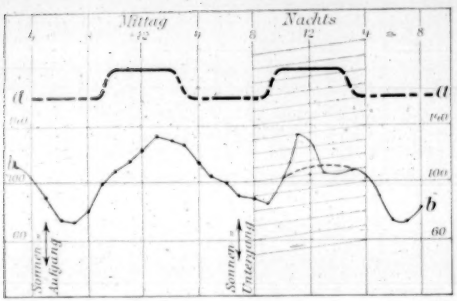


Fig. 4.

Beide Kurven zeigen deutlichen Parallelismus; zur Zeit der Maxima der Elektrizitätszerstreuung treten auch die Maxima unserer Störungen ein, während diese verschwinden, wenn die Elektrizitätszerstreuung ihre kleinsten Werte annimmt.[1])

Da man nun nach Elster und Geitel, Ebert u. a. diese Änderungen in den Werten der Elektrizitätszerstreuung mit den Bewegungen der ionisierten Bodenluft in den Kapillaren der Erdoberfläche in Zusammenhang bringt, so liegt die Vermutung nahe, daß die beobachteten Störungen in dem durch die Wasserleitung geerdeten Empfangssystem durch die Bewegung ionisierter Bodenluft veranlaßt sind.

Eine völlige Klärung dieser Frage erfordert erhebliche Ausdehnung der Untersuchungen, besonders müßten zeitlich möglichst ununterbrochene Reihen gleichzeitiger Beobachtungen unserer Erscheinung und der Elektrizitätszerstreuung an Ort und Stelle ausgeführt werden.

Da hierzu eine größere Zahl geschulter Beobachter erforderlich ist, ist es augenblicklich nicht möglich, die Untersuchung weiter zu führen.

Bei der Durchführung der hier mitgeteilten Untersuchung bin ich durch sorgsame Mitarbeit der Herren Joh. Rautenkrantz, H. Preuß und H. Strauß in dankenswerter Weise unterstützt worden. Wir haben abwechselnd die Messungen auf der Sende- und Empfangsstation ausgeführt.

Ich möchte diese Gelegenheit ergreifen, um auch an dieser Stelle den beiden Direktoren der Papierfabrik, Herren Müller und Ottens zu Halle a/S.-Cröllwitz, meinen verbindlichsten Dank für ihr Entgegenkommen auszusprechen. Nur dadurch, daß sie mir gestatteten, meine Station von der Zentrale der Papierfabrik zu speisen, war es mir möglich, den für die Versuche außerordentlich günstigen Platz im äußersten Nordwesten der Stadt zu benutzen.

Halle a/S.-Cröllwitz, Phys. Versuchsstation, Januar 1907.

(Eingegangen 30. Januar 1907.)

1) Der Vorgang der Elektrizitätszerstreuung ist nach den bisherigen Mitteilungen von sehr vielen Faktoren beeinflußt, daher ist der tägliche Gang der Erscheinung je nach Jahr, Jahreszeit und Beobachtungsort verschieden. Der überraschende Parallelismus der Kurven *a* und *b* ist vielleicht nur zufällig so scharf ausgesprochen. Die Kurve *b* ist nach Zölß aus Beobachtungen zu Kremsmünster (Winter 1901/2 und 1902/3) abgeleitet. Durch Hinzufügung des Materials aus 1903/4 fand Zölß aus ca. 12870 Beobachtungen, daß die Lage der Minima zur Zeit des Sonnenauf- und -untergangs bestehen blieb, daß das Hauptmaximum am Tage mit der Zeit des Temperaturmaximums zusammenfiel, daß weiter in der Nacht ein schwächeres Maximum zwischen 12 und 2 Uhr abzuleiten war, dessen Verlauf man vielleicht durch den gestrichelten Teil der Nachtkurve andeuten kann. (Fig. 4.)

Lüdeling teilt (diese Zeitschr. **5**, 447 ff., 1904) auf Grund von Aufnahmen mit einem selbstregistrierenden Apparat, gemacht in 8 Tagen des Frühjahrs 1904, Beobachtungen mit, die einen wesentlich anderen Verlauf zeigen; es ist sicher, daß eine Vermehrung des Materials das Kurvenbild wesentlich verändern wird.

Mitteilungen aus dem physikalischen Institut der Universität Pisa. (Direktor: A. Battelli.)

No. 31[1]): R. Magini, Über den Einfluß der Ränder auf die elektrostatische Kapazität der Kondensatoren.

1. In meinen früheren Mitteilungen über denselben Gegenstand[2]) habe ich die hauptsächlichen Formeln untersucht, welche aufgestellt worden sind, um den Einfluß der Ränder eines Kondensators auf seine Kapazität zu korrigieren. In der vorliegenden Mitteilung beabsichtige ich, einen Kunstgriff zu entwickeln, welcher den genannten Einfluß deutlicher zu machen getattet, indem er ihn sozusagen von der übrigen Kapazität des Kondensators trennt. Ich beabsichtige ferner, einen summarischen und vorläufigen experimentellen Beweis für die untersuchten Formeln anzutreten, um zu sehen, inwieweit sie experimentellen Verhältnissen entsprechen.

2. Aus einem und demselben Metallblech mit gut geglätteten Flächen wollen wir zwei Scheiben von gleichem Flächeninhalt ausschneiden; die eine dieser Scheiben soll einen kreisförmigen, die andere einen elliptischen Umriß haben. Mit jeder dieser Scheiben wollen wir einen, erforderlichen Falles mit einem Schutzring versehenen Kondensator bilden. Es seien l_e und l_c die beiden Umrisse, R der Radius der Kreisscheibe, a und b die beiden Halbachsen der elliptischen Scheibe, d der Abstand zwischen einer Scheibe und der anderen Belegung, λ die Breite des Zusatzstreifens, wie sie sich aus einer der angegebenen Formeln ergibt, C und C_e die korrigierten Kapazitäten.

1) No. 30: diese Zeitschr. **8**, 65, 1907.
2) Diese Zeitschr. **7**, 844, 1906 und **8**, 39, 1907.

Dann wird sein:

$$C_e = \frac{\pi ab + l_e \lambda}{4\pi d},$$

$$C_c = \frac{\pi R^2 + l_c \lambda}{4\pi d},$$

also:

$$C_e - C_c = \frac{(l_e - l_c)\lambda}{4\pi d}.$$

Nun ist:

$$l_e = 2\pi a\left\{1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}e^2\right)^3 - \cdots\right\}$$

und

$$l_c = 2\pi R = 2\pi\sqrt{ab} = 2\pi a\sqrt[4]{1-e^2},$$

wo e die Exzentrizität des elliptischen Umrisses ist.

Daraus ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} C_e - C_c = \frac{a}{2d}\Big\{1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \left(\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}e^2\right)^3 - \cdots \\ - \sqrt[4]{1-e^2}\Big\}\lambda \cdots \end{aligned}\right| \quad (1)$$

Bezeichnen wir nun mit k die Kapazität des Elektrometers und der Verbindungsdrähte, die von diesem zu dem einen oder anderen Kondensator führen, bezeichnen wir weiter mit V das Ladungspotential, mit V_e und V_c die Potentiale, welche die beiden Kondensatoren in Verbindung mit dem Elektrometer annehmen, so wird, wenn die angegebenen Formeln tatsächlich nicht nur die korrigierte Kapazität des Kondensators, sondern auch die wahre Kapazität darstellen,

$$C_e V = (C_e + k) V_e$$

und

$$C_c V = (C_c + k) V_c$$

sein. Und aus diesen Gleichungen erhalten wir, wenn wir die am Elektrometer beobachteten Ausschläge Δ, Δ_e, Δ_c einsetzen, auflösen und subtrahieren,

$$C_e - C_c = k\left(\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e} - \frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}\right),$$

eine Gleichung, die im Verein mit der Gleichung (1) ohne weiteres die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{2d}\Big\{1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \cdots - \sqrt[4]{1-e^2}\Big\}\lambda \\ = k\left(\frac{\Delta}{\Delta - \Delta_e} - \frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}\right) \end{aligned}\right| \quad (2)$$

ergibt.

3. Die Meßmethode war eine rein elektrostatische. Sie bestand darin, daß mittels eines guten Elektrometers nach Thomson-Mascart die elektromotorische Kraft von vier Akkumulatoren und die Potentiale der Kondensatoren bestimmt wurden. Um die Streuung zu vermeiden, wurde die stoßweise Ablenkung der Nadel berücksichtigt, die mit Hilfe einer Batterie von 200 kleinen Planté-Elementen auf einem bestimmten Potential gehalten wurde. Jede der Kondensatorscheiben war auf einem Glasstab befestigt; dieser saß in einem Halter, der mittels einer starken Mikrometerschraube von 0,1 cm Ganghöhe mit einem in 200 Teile geteilten Schraubenkopfe bewegt wurde. Die Schutzringe ließen sich ebenfalls einstellen; sie hingen an Seidenschnüren und Mikrometerschrauben. Ein gutes Kathetometer diente weiter dazu, die untere Fläche der Scheibe und die Oberfläche der großen zur Erde abgeleiteten Platte einander genau parallel zu richten und sie auf den gewünschten gegenseitigen Abstand einzustellen, sowie auch dazu, die unteren Flächen einer Scheibe und ihres Schutzringes in die gleiche Ebene zu bringen. Durch schnell arbeitende und sorgfältig isolierte Kommutatoren konnten die verschiedenen Verbindungen hergestellt werden.

Die Abmessungen der Kondensatoren betrugen:

für den kreisförmigen Kondensator:

$R = 15{,}296$ cm; Dicke 0,5 cm;

für den elliptischen Kondensator:

$a = 21{,}66$ cm; $b = 10{,}831$ cm; Dicke 0,5 cm.

Der Unterschied des Flächeninhalts zwischen den beiden Scheiben betrug 0,6102 cm². Bezeichnet man mit c den Unterschied in der Kapazität, der sich aus dieser unvollkommenen Gleichheit ergibt, und beachtet man, daß

$$c = \frac{0{,}6102}{4d},$$

$$a = 2b,$$

$$e^2 = \frac{3}{4},$$

$$\sqrt[4]{1-e^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist, so sieht man, daß Gleichung (2) in:

$$\frac{0{,}6102}{4d} + \frac{1{,}05451}{d}\lambda = k\left(\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e} - \frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}\right) \quad (3)$$

übergeht.

Wenn die für λ angegebenen Formeln den tatsächlichen Verhältnissen gut entsprechen, so wird der Wert für k, den man aus diesem letzten Ausdruck erhält, für die verschiedenen Werte von d konstant und gleich der wahren Kapazität sein müssen. Wenn dies nicht zutrifft, so werden uns die verschiedenen Werte für k lehren, welcher Ausdruck für λ vorzuziehen ist, und für welche Abstände er Gültigkeit haben kann.

Die Messungen wurden bei den folgenden Abständen ausgeführt: 0,1 cm, 0,2 cm und 1 cm. Der Kürze halber übergehe ich hier die Tabellen

für die Ablenkungen und teile nur die Mittelwerte für $\frac{\Delta_e}{A-\Delta_e}$ und $\frac{\Delta_c}{A-\Delta_c}$ mit:

d	$\frac{\Delta_e}{A-\Delta_e}$	$\frac{\Delta_c}{A-\Delta_c}$	$\frac{\Delta_e}{A-\Delta_e}-\frac{\Delta_c}{A-\Delta_c}$
0,1 cm	18,955	18,825	0,130
0,2 „	9,519	9,445	0,074
1 „	2,197	2,162	0,035

Setzt man nun in Gleichung (3) nacheinander die Formeln:

$$\lambda = \frac{2d}{\pi}\log 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und

$$\lambda = \frac{2d}{\pi}\log\left(2+\frac{s}{2d}\right)+\frac{s}{2\pi}\log\left(1+\frac{4d}{s}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ein, wo s die Dicke der Scheiben bedeutet, so erhält man für k entsprechend die folgenden Werte:

d	k nach (4) berechnet	k nach (5) berechnet
0,1 cm	15,31 cm	23,29 cm
0,2 „	16,59 „	26,38 „
1 „	17,42 „	25,81 „

Die nach den verschiedenen Formeln gewonnenen Werte für k weichen merklich voneinander ab. Diese Formeln stellen also den gesamten Einfluß des Randes mit sehr verschiedener Genauigkeit dar. Man sieht aber ohne weiteres, daß dieser Kunstgriff gerade diesen Einfluß leicht und unmittelbar zu beurteilen gestattet, während dies nach einer anderen Vergleichsmethode nicht geschehen kann. Wollte man beispielsweise, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Verhältnisse $\frac{\Delta_e}{A-\Delta_e}$ und $\frac{\Delta_c}{A-\Delta_c}$ gleich $\frac{C'_e}{k}$ und $\frac{C'_c}{k}$ sind —, wo C'_e und C'_c die wahren Kapazitäten der beiden Kondensatoren sind —, wollte man sich einen Begriff von obigen Formeln (4) und (5) dadurch bilden, daß man aus den genannten Verhältnissen k herleitete, indem man für C'_e und C'_c die theoretischen korrigierten Kapazitäten C_e und C_c einsetzte, so würde man für k merklich gleiche Werte erhalten, trotz der beträchtlichen Verschiedenheit zwischen den Formeln wie zwischen den Werten der korrigierten Kapazitäten, die sich nach der einen oder der anderen Formel ergeben würden.

Man findet nämlich:

d	k nach (4) berechnet	k nach (5) berechnet
mit dem elliptischen Kondensator		
0,1 cm	31,041 cm	31,593 cm
0,2 „	31,006 „	31,839 „
1 „	27,568 „	29,434 „
mit dem kreisförmigen Kondensator		
0,1 cm	31,161 cm	31,650 cm
0,2 „	29,577 „	30,277 „
1 „	27,834 „	29,498 „

Außer bei großen Abständen liefern uns diese Tabellen kein Mittel, den Gang der zur Untersuchung stehenden Formeln zu verfolgen. Die unmittelbare Kenntnis von k, die wir durch das Experiment mit Genauigkeit erhalten, wird uns nicht nur gestatten, den Gang der Formeln zu verfolgen, sondern auch, aus der Formel (4) das Maß für λ, also den Einfluß des Randes, abzuleiten.

4. Die in Rede stehende Methode kann indessen für die Bestätigung der Kirchhoffschen Formeln, welche kreisförmige Umrisse voraussetzen, keine Anwendung finden. Es läßt sich jedoch ein Kunstgriff für die gleichzeitige Prüfung beider Formeln angeben. Man denke sich nämlich einen ganz genau kreisrunden Kondensator, der sich sowohl mit als auch ohne Schutzring verwenden läßt, und gleiche mittels einer sehr genauen Vergleichsmethode den Abstand zwischen den Belegungen so ab, daß einmal der Kondensator ohne Schutzring und dann der gleiche Kondensator mit Schutzring immer dieselbe Kapazität haben, nämlich die eines Vergleichskondensators. Es seien dann d und d' die beiden Abstände, die diesen beiden Fällen entsprechen. Es wird natürlich $d > d'$ sein. Dann müssen, wenn die Formeln von Kirchhoff den Sachverhalt gut darstellen, die beiden Ausdrücke

$$\frac{R^2}{4d}+\frac{R}{\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+s)}{ed^2}+\frac{s}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{s}\right)\right\}$$

und

$$\frac{R^2}{4d'}+\frac{c'(2R+c')}{4d'}-\frac{R+c'}{\pi}(\beta_0\tan\beta_0+\log\cos\beta_0),$$

wo $\beta_0 = \operatorname{arc\,tang}\frac{c'}{d'}$ und c' die Breite des Luftraumes zwischen dem Kollektor und dem Ringe ist, numerisch gleiche Resultate liefern.

5. Man sieht ein, daß das im Abschnitt 3 Gesagte auch für den Kondensator mit Schutzring und für den Einfluß des Schlitzes gilt. Aus den Werten für Δ', Δ'_e, Δ'_c, $\frac{\Delta'_e}{\Delta'-\Delta'_e}$,

$\frac{J'_c}{J'-J_c}$, die man in diesem zweiten Falle erhält, ergeben sich nämlich dieselben Folgerungen für k. Auch in diesem Falle gestattet die Formel (4), die Störung durch den zwischen dem Kollektor und dem Ringe befindlichen Luftraum zu bewerten. Statt aber diese Daten mitzuteilen, will ich nachstehende Tabelle geben. Sie gestattet einen summarischen Überblick über die experimentelle Bestätigung der angegebenen Formeln und ermöglicht einen Vergleich zwischen den aus den Formeln erhaltenen theoretischen und den experimentell aus den Versuchen gewonnenen Werten.

Die dritte und vierte Spalte geben die theoretischen korrigierten Kapazitäten C (Kapazität ohne Ring) und C' (Kapazität mit Schutzring), die fünfte Spalte enthält die Verhältnisse $\frac{C}{k}$, die gleich $\frac{J_i}{J-J_i}$ oder gleich $\frac{J_e}{J-J_e}$ sind, je nachdem sie sich auf den einen oder den anderen Kondensator beziehen; die sechste Spalte enthält die analogen Werte für die Verhältnisse $\frac{C'}{k}$ für die mit Schutzring versehenen Kondensatoren, und die beiden letzten Spalten die beiden Werte für $\frac{C}{C'}$. Weiter ist d der Abstand zwischen den Belegungen, S die Oberfläche der Scheiben, s die Dicke und c die Hälfte des Schlitzes.

d in cm	$\frac{S}{4\pi d}$	C in cm	C' in cm	$\frac{C}{k}$	$\frac{C'}{k}$	Werte für $\frac{C}{C'}$ theoretisch	experimentell

Elliptischer Kondensator

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2d}{\pi}\log\left(2+\frac{s}{2d}\right)+\frac{s}{\pi}\log\left(1+\frac{4d}{s}\right) \\ \lambda' = c \end{cases} \quad (1)$$

0,1	586,444	598,837	590,801	18,955	18,888	1,0136	1,0035
0,2	293,222	303,074	295,400	9,519	9,456	1,0260	1,0067
1	58,644	64,666	59,089	2,197	1,904	1,0944	1,1539

Kreisförmiger Kondensator

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2d}{\pi}\log\left(2+\frac{s}{2d}\right)+\frac{s}{\pi}\log\left(1+\frac{4d}{s}\right) \\ \lambda' = c \end{cases} \quad (1)$$

0,1	584,919	595,819	588,743	18,825	18,773	1,0120	1,0028
0,2	292,459	301,105	294,371	9,445	9,369	1,0229	1,0081
1	58,491	63,776	58,873	2,162	1,874	1,0833	1,1537

$$\begin{cases} \lambda = \frac{d}{\pi}\log\frac{8\pi R}{ed} \\ \lambda' = c \end{cases} \quad (2)$$

0,1	584,919	602,578	588,743	18,825	18,773	1,0235	1,0028
0,2	292,459	308,428	294,371	9,445	9,369	1,0478	1,0081
1	58,491	70,542	58,873	2,162	1,874	1,1982	1,1537

d in cm	$\frac{S}{4\pi d}$	C in cm	C' in cm	$\frac{C}{k}$	$\frac{C'}{k}$	Werte für $\frac{C}{C'}$ theoretisch	experimentell

$$\begin{cases} \lambda = \frac{d}{\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+s)R}{ed^2}+\frac{s}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{s}\right)\right\} \\ \lambda' = c-\frac{2d}{\pi}(\beta_0 \operatorname{tang}\beta_0+\log\cos\beta_0) \end{cases} \quad (3)$$

0,1	584,919	607,677	588,162	18,825	18,773	1,0332	1,0028
0,2	292,459	312,195	294,219	9,445	9,369	1,0611	1,0081
1	58,491	72,068	58,872	2,162	1,874	1,2241	1,1537

Die verschiedenen für λ und λ' gegebenen Formeln sind mit einer sehr relativen Annäherung anwendbar. Sie verhalten sich nicht gleich; die Systeme (2) und (3) sind für alle untersuchten Abstände zu groß, während das System (1) für Werte von d zwischen 0,2 und 1 cm die experimentelle Bestätigung finden muß; tatsächlich hat das Verhältnis $\frac{C}{C'}$ beim Abstand 1 cm seinen Gang umgekehrt.

Weitere systematische Untersuchungen sind im hiesigen Institute im Gange. Über ihre Ergebnisse soll später berichtet werden.

(Aus dem Italienischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 21. Januar 1907.)

Theorie der Kreiselräder auf Grund der Wirbelbewegung.

Von H. Lorenz.

Anfang 1905 veröffentlichte ich an dieser Stelle[1]) eine noch recht unvollkommene hydrodynamische Studie: „Die Wasserströmung in rotierenden Kanälen", aus der im Laufe der letzten beiden Jahre eine in sich abgeschlossene Theorie der Kreisel- oder Schaufelräder hervorgegangen ist, welche nicht nur schon in der technischen Praxis Aufnahme gefunden hat, sondern auch als unmittelbare Anwendung der Wirbelbewegung von Flüssigkeiten einiges wissenschaftliches Interesse beanspruchen dürfte.[2])

Die Kreiselräder, welche als Turbinen für Wasser-, Dampf- oder Gasbetrieb zu motorischen Zwecken, als Pumpen und Gebläse zur Förderung tropfbarer oder elastischer Flüssigkeiten und als Propeller zur Fortbewegung von Fahrzeugen dienen, bestehen immer aus einer Anzahl symmetrisch um eine Drehachse gruppierter Schaufeln, längs deren die Arbeits-

1) Diese Zeitschr. **6**, 82, 1905.

2) Für eingehendere Studien verweise ich auf meine Monographie: „Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder". München, 1906.

flüssigkeit stationär unter Energieaufnahme oder -abgabe hinströmt. Wegen der durch die Rotation des Kreiselrades bedingten Symmetrie der Schaufeln um die Drehachse erscheint es zweckmäßig, die Untersuchung der Bewegungsvorgänge in einem Zylinderkoordinatensystem z, r, φ durchzuführen, dessen z-Achse mit der Drehachse zusammenfällt (Fig. 1). Sind dann

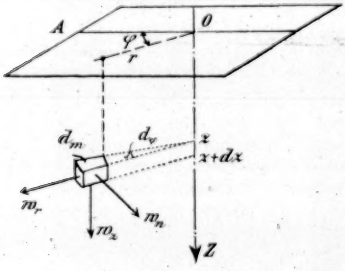


Fig. 1.

w_z, w_r und w_n die absoluten Geschwindigkeitskomponenten eines Massenelementes der Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte γ

$$dm = \frac{\gamma}{g} r\, dr\, dz\, d\varphi, \qquad (1)$$

so liefert zunächst die Kontinuität bei stationärer Strömung der Flüssigkeit die Gleichung:

$$\frac{\partial(\gamma w_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\gamma w_z r)}{\partial z} + \frac{\partial(\gamma w_n r)}{r\partial\varphi} = 0.$$

Für inkompressible Flüssigkeiten, sowie in dem Falle, daß man die Änderungen von γ der elastischen Flüssigkeit im Verlaufe der ins Auge gefaßten Strömung vernachlässigen darf, vereinfacht sich die Gleichung in

$$\frac{\partial(w_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(w_z r)}{\partial z} + \frac{\partial(w_n r)}{r\partial\varphi} = 0. \qquad (2)$$

Diese Vereinfachung ist praktisch immer zulässig, da man bei Dampf- oder Gasturbinen, bzw. Turbokompressoren stets das ganze Druckgefälle in eine größere Zahl von Stufen zerlegen muß, so daß auf eine derselben wie bei einfachen Gebläsen nur eine geringe Druckdifferenz entfällt. Dazu kommt noch, daß der eigentliche Expansions- oder Kompressionsvorgang nahezu vollständig zwischen den festen Leitschaufeln erfolgt, während in den beweglichen Laufrädern vorwiegend eine Abgabe oder Aufnahme von kinetischer Energie ohne nennenswerte Änderung der spezifischen Gewichte γ vor sich geht.

Die Flüssigkeitsströmung ist nun im allgemeinen noch von einem Wirbel ε begleitet, dessen drei Komponenten (Fig. 2)

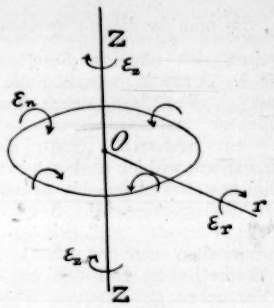


Fig. 2.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial(w_n r)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial\varphi}\right) \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial w_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial(w_n r)}{\partial z}\right) \\ \varepsilon_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

wir als Axial-, Radial- und Ringwirbel bezeichnen wollen. Bei der Aufstellung der dynamischen Grundformeln berücksichtigen wir die Wirkung der Schaufeln auf die an ihnen hinströmende Flüssigkeit durch Einführung einer Zwangsbeschleunigung q mit den drei Komponenten q_z, q_r und q_n und erhalten, wenn außerdem noch die Beschleunigung g der Schwere parallel der positiv nach unten gerichteten z-Achse wirkt,

$$\left.\begin{aligned} q_z + g - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dw_z}{dt} \\ q_r - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{dw_r}{dt} - \frac{w_n^2}{r} \\ q_n - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{r\partial\varphi} &= \frac{dw_n}{dt} + \frac{w_r w_n}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die bisher entwickelten Gleichungen definieren ganz allgemein eine gezwungene dreidimensionale Strömung, unter dem Einflusse der Schwere, deren weitere Verfolgung schon mathematisch unüberwindlichen Schwierigkeiten begegnet.[1]) Beachtet man dann noch, daß

1) Einen solchen Versuch, die Turbinentheorie mit Rücksicht auf die Verschiedenheit des Bewegungszustandes zwischen zwei Schaufeln, also dreidimensional auszubauen, hat neuerdings Prof. Prášil (Zürich) in seiner Abhandlung „Die Berechnung der Kranzprofile und Schaufelformen für Turbinen und Kreiselpumpen" (Schweiz. Bauzeitung Dez. 1906) und zwar mit Hilfe der Methode konformer Abbildungen unternommen, welche die Existenz eines Geschwindigkeitspotentiales voraussetzt, mit dem Prášil in der Tat operiert. Da ein solches mit dem Auftreten von Wirbeln im Kreiselrade unvereinbar ist, so muß dieser Versuch als vollkommen gescheitert bezeichnet werden, zumal Prášil noch übersehen hat, daß die durch die Schaufelreaktionen dargestellten äußeren Kräfte im Wirbelraum kein Potential besitzen können, und schließlich bei der Transformation der Be-

beim Vorbeistreichen der Schaufeln des Laufrades an den festen Leitschaufeln die Flüssigkeitsbewegung zwischen der ersteren notwendigerweise periodischen, im übrigen aber ganz unkontrollierbaren Störungen unterworfen ist, welche infolge des Auftretens von Stößen sogar die Kontinuität beeinträchtigen, so erscheint eine Vereinfachung der Problemstellung dringend geboten. Eine solche bietet sich zwanglos in der Annahme einer unendlichen Anzahl Schaufeln von verschwindender Dicke, wodurch die Unterschiede des Bewegungszustandes auf einem Parallelkreis um die Drehachse eliminiert werden, die Strömung also in eine symmetrische um die Achse übergeht. Hiermit verschwinden in den obigen Gleichungen alle partiellen Ableitungen nach φ und das Problem ist auf ein zweidimensionales zurückgeführt. Gegenüber der bisherigen von Euler und Poncelet begründeten eindimensionalen Turbinentheorie, welche sich auf die Verfolgung eines unendlich dünnen Stromfadens beschränkt, und neuerdings durch Annahme einer hypothetischen, mit der Kontinuität im allgemeinen nicht verträglichen Unterteilung in endlich viele Elementarkanäle (sog. Teilturbinen) modifiziert wurde, bedeutet unsere Behandlung somit lediglich einen natürlichen Fortschritt.

Mit der unendlichen Schaufelzahl haben wir aber auch die sonst sprungweise Änderung des Druckes an den Schaufeln ausgeschaltet und müssen nur noch beachten, daß die Komponenten q_z, q_r, q_u der Zwangsbeschleunigung schon wegen der Existenz der für den Energieumsatz maßgebenden Drehbeschleunigung q_u kein eindeutiges Potential besitzen. Da wir im Gegensatz hierzu den Druck p von jetzt ab als Potential seiner Ableitungen betrachten, so muß mit den Ableitungen der Geschwindigkeiten nach φ auch die vom Drucke herrührende Drehkomponente $\partial p : \partial \varphi$ in der dritten Gleichung (4) verschwinden. Mit diesen Bemerkungen gehen unsere Gleichungen (2) (3) (4) über in

$$\frac{\partial (w_r\, r)}{\partial r} + \frac{\partial (w_z\, r)}{\partial z} = 0 \qquad (2a)$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{2r}\frac{\partial (w_u\, r)}{\partial r} \\ \varepsilon_r &= -\frac{1}{2r}\frac{\partial (w_u\, r)}{\partial z} \\ \varepsilon_u &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r}\right) \end{aligned}\right| \qquad (3a)$$

wegungsgleichungen in Relativkoordinaten den absoluten Drehwinkel φ des Fahrstrahls r der Flüssigkeitsbahn mit dem Relativwinkel χ verwechselt. Hierdurch werden natürlich alle Schlußfolgerungen falsch, wie ich im einzelnen in meiner Abhandlung „Zur neuen Theorie der Kreiselräder" (Zeitschrift f. d. ges. Turbinenwesen 1907 Heft 4) nachgewiesen habe.

$$\left.\begin{aligned} q_z + g - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w_z}{dt} \\ q_r - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial w_r}{dt} - \frac{w_u^2}{r} \\ q_u\, r &= \frac{d(w_u\, r)}{dt} \end{aligned}\right| \qquad (4a)$$

von denen wir die letzte Gleichung (4a) als die Momentengleichung der Flüssigkeitsströmung bezeichnen wollen. In den Formeln (4a) ist wegen der Symmetrie dieser Strömung um die Achse

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw_z}{dt} &= w_z\frac{\partial w_z}{\partial z} + w_r\frac{\partial w_z}{\partial r} \\ \frac{dw_r}{dt} &= w_z\frac{\partial w_r}{\partial z} + w_r\frac{\partial w_r}{\partial r} \\ \frac{d(w_u\, r)}{dt} &= w_z\frac{\partial (w_u\, r)}{\partial z} + w_r\frac{\partial (w_u\, r)}{\partial r} \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

zu setzen, während aus (2a) folgt, daß für die Bewegung eine Stromfunktion

$$\Psi = \Psi(r, z) \qquad (6)$$

existiert, so zwar, daß

$$w_z\, r = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad w_r\, r = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \qquad (7)$$

Diese Stromfunktion definiert eine Schar von Rotationsflächen um die Achse, mit Meridianschnitten nach Fig. 3, auf denen die

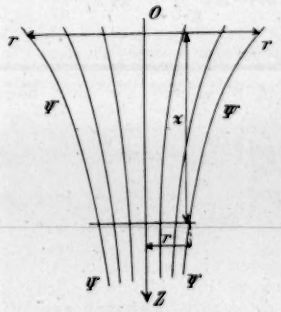


Fig. 3.

einzelnen Flüssigkeitsbahnen sich symmetrisch gruppieren. Durch einen Zylinder vom Radius r und der Höhe dz zwischen zwei solchen benachbarten Rotationsflächen tritt alsdann ein ebenso großes Flüssigkeitsgewicht dQ in der Zeiteinheit über, wie durch einen Normalring vom Radius r und der Breite dr, so zwar, daß mit (7)

$$\left.\begin{aligned} dQ &= 2\pi\gamma w_z\, r\, dr = 2\pi\gamma\frac{\partial \Psi}{\partial r}dr \\ dQ &= 2\pi\gamma w_r\, r\, dz = -2\pi\gamma\frac{\partial \Psi}{\partial z}dz \end{aligned}\right| \qquad (8)$$

Daraus folgt aber, daß zwischen einer Stromfläche vom Parameter Ψ und der Achse insgesamt eine Gewichtsmenge in der Zeiteinheit von

$$Q = 2\pi\gamma\Psi \tag{9}$$

und daher zwischen zwei Stromflächen mit den Parametern Ψ' und Ψ''

$$Q = 2\pi\gamma(\Psi' - \Psi'') \tag{9a}$$

strömt. Die Parameter, bzw. die Differenzen derselben beim Übergang zwischen zwei Stromflächen sind demnach der in der Zeiteinheit strömenden Flüssigkeitsmenge (dem sog. Flusse) direkt proportional.

Nunmehr gehen wir zu den dynamischen Grundformeln (4a) über und multiplizieren zunächst die Momentengleichung mit dem Massenelement Gleichung (1), indem wir gleichzeitig die dritte Formel (5) benutzen. Alsdann erhalten wir für das von diesem Element auf die Schaufeln ausgeübte Drehmoment

$$d\mathfrak{M} = q_n\, r\, dm$$

$$= \frac{\gamma}{g}\left(w_z\, r\frac{\partial(w_n r)}{\partial z} + w_r\, r\frac{\partial(w_n r)}{\partial r}\right) dr\, dz\, d\varphi$$

oder nach Ausführung der Integration über φ insgesamt

$$\mathfrak{M} = 2\pi\frac{\gamma}{g}\iint\left(w_z\, r\frac{\partial(w_n r)}{\partial z} + w_r\, r\frac{\partial(w_n r)}{\partial r}\right) dr\, dz. \tag{10}$$

Wegen (8) dürfen wir aber hierfür auch schreiben

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{g}\iint\left(\frac{\partial(w_n r)}{\partial z}dz + \frac{\partial(w_n r)}{\partial r}dr\right) dQ \tag{10a}$$

oder kürzer

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{g}\iint dQ\, d(w_n r). \tag{10b}$$

Verlangen wir nun, daß jedes Element dQ des Flusses denselben Beitrag zur Leistung des mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Kreiselrades

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M}\omega \tag{11}$$

liefert, so ergibt die Integration von (10b) zwischen zwei Grenzen

$$\mathfrak{M} = \frac{Q}{g}\left((w_n r)_2 - (w_n r)_1\right) \tag{12}$$

eine schon von Euler für den unendlich dünnen Stromfaden abgeleitete Gleichung. Dieselbe bedingt ersichtlich die Existenz einer zweiten Schar von Rotationsflächen

$$w_n r = f(r, z) \tag{13}$$

im Bereiche unserer symmetrischen Strömung, deren jede von allen Flüssigkeitselementen mit gleichem Energieinhalte durchflossen wird, und denen auch die Ein- und Austrittsflächen des Rades mit den Parametern $(w_n r)_1$ bzw. $(w_n r)_2$ zugehören. Durch diese Niveauflächen ist alsdann in Verbindung mit den von ihnen nach Fig. 4 ge-

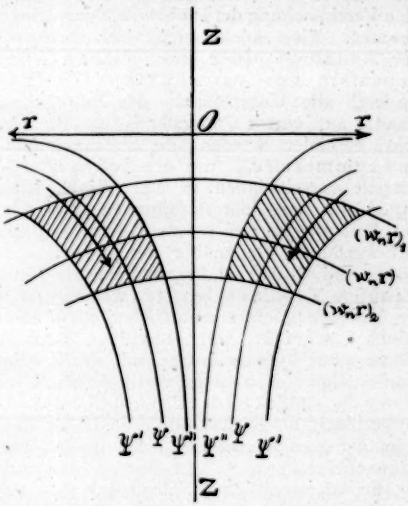


Fig. 4.

schnittenen Stromlinienflächen Ψ der ganze Stromverlauf definiert und insbesondere durch die beiden Parameterpaare $(w_n r)_1$ und $(w_n r)_2$ bzw. Ψ' und Ψ'' das dem Flusse Q entsprechende in Fig. 4 schraffierte Radprofil festgesetzt. Da nach diesen Darlegungen nur die Drehbeschleunigung q_n der Schaufelreaktion zum Energieumsatze in einem Kreiselrade herangezogen wird, so entsteht die Frage, in welcher Weise diese Arbeitsleistung zustande kommt. Zur Beantwortung derselben führen wir in die Momentengleichung (10a) die Wirbelkomponenten (3a) ein und erhalten

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{g}\iint(\varepsilon_z\, r\, dr - \varepsilon_r\, r\, dz)\, dQ, \tag{14}$$

woraus sich sofort ergibt, daß die Arbeitsleistung eines solchen Kreiselrades auf der Existenz wenigstens einer der beiden Wirbelkomponenten ε_z und ε_r beruht. Da nun diese Wirbel in der zuströmenden Arbeitsflüssigkeit nicht vorhanden sind, in der nach dem Energieaustausch abfließenden dagegen nicht mehr ausgenützt werden können, so müssen sie im Bereiche eines ökonomisch arbeitenden d. h. vollkommenen Kreiselrades, zu dem naturgemäß auch die fest-

stehenden Leitschaufeln gehören, erst erzeugt und dann wieder umgewandelt werden. Ein jedes Kreiselrad bildet somit im Verein mit seinem Leitapparat einen Wirbelraum, in dem weder die Geschwindigkeitskomponenten, noch auch die durch die Schaufelreaktionen dargestellten äußeren Kräfte eindeutige Potentiale besitzen können.

Wichtig ist ferner noch die Bemerkung, daß der Ringwirbel ε_u in die Momentengleichung (14) gar nicht eingeht, und daher am Energieumsatz selbst unbeteiligt ist. Da er in der zuströmenden Arbeitsflüssigkeit noch nicht vorhanden ist, so kann er im Rade (abgesehen etwa auf Grund der hier vernachlässigten Flüssigkeitsreibung) auch nicht auftreten, und daher ist

$$2\varepsilon_u = \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} = 0. \qquad (15)$$

Mit (7) führt dies auf eine Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad (15a)$$

für die Stromfunktion, deren Wahl somit einer Einschränkung unterliegt, auf die wir weiter unten noch zurückkommen werden.

Vorher kehren wir noch einmal zu den Grundformeln (4a) zurück, multiplizieren dieselben der Reihe nach mit den Bahnelementen dz, dr, $d\varphi$ eines Flüssigkeitsteilchens und erhalten durch Addition, da es sich um eine stationäre Strömung handelt, unter gleichzeitiger Einführung der resultierenden Absolutgeschwindigkeit w

$$w^2 = w_z^2 + w_r^2 + w_u^2 \qquad (16)$$

der Differentialgleichung der Energie der Masseneinheit

$$q_z\,dz + q_r\,dr + q_u\,r\,d\varphi + g\,dz - \frac{g}{\gamma}\,dp = w\,dw \qquad (17)$$

Hierin stellt die Summe der drei ersten Glieder links

$$dE = q_z\,dz + q_r\,dr + q_u\,r\,d\varphi \qquad (18)$$

den Energieaustausch der Masseneinheit mit den Schaufeln dar, für den wir auch nach Einführung des relativen Drehwinkels χ des Fahrstrahls der Flüssigkeitsbahn durch

$$d\varphi = d\chi + \omega dt \qquad (19)$$

schreiben dürfen

$$dE = q_z dz + q_r dr + q_u r d\chi + q_u r \omega dt$$

oder wegen der dritten Gleichung (4a)

$$dE = q_z dz + q_r dr + q_u r d\chi + \omega d(w_u r). \qquad (18a)$$

Nun ist aber, da äußere Arbeit nach (10b) und (11) überhaupt nur auf Grund der Änderung von $w_u r$ geleistet wird, für sich schon

$$dE = \omega d(w_u r) \qquad (18b)$$

und damit folgt aus (18)

$$q_z dz + q_r dr + q_u r d\chi = 0 \qquad (20)$$

d. h., daß die Schaufelreaktion q zur relativen Flüssigkeitsbahn, also auch zur Schaufelfläche selbst normal gerichtet sein muß, wie es der reibungsfreien gezwungenen Bewegung entspricht.

Damit aber geht die Differentialgleichung (17) für die Energie über in

$$\frac{g}{\gamma}\,dp = g\,dz + \omega d(w_u r) + w dw \qquad (17a)$$

und ergibt integriert mit einer Konstanten

$$\frac{g}{\gamma}\,p = gz + \omega(w_u r) + \frac{w^2}{2} + C. \qquad (17b)$$

Diese Gleichung können wir nun zur Elimination der Ableitungen des Druckes p aus den ersten beiden Formeln (4a) benutzen, wonach sich die Komponenten q_z und q_r als Funktionen der Geschwindigkeiten ergeben müssen. Wir finden nach einigen Umformungen

$$\left.\begin{aligned} q_z &= w_r\left(\frac{\partial w_z}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial z}\right) - \left(\frac{w_u}{r} - \omega\right)\frac{\partial (w_u r)}{\partial z} \\ q_r &= w_z\left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r}\right) - \left(\frac{w_u}{r} - \omega\right)\frac{\partial (w_u r)}{\partial r} \end{aligned}\right| \qquad (21)$$

oder auch, da der Ringwirbel nach (15) verschwindet, kürzer

$$\left.\begin{aligned} q_z &= -\left(\frac{w_u}{r} - \omega\right)\frac{\partial (w_u r)}{\partial z} \\ q_r &= -\left(\frac{w_u}{r} - \omega\right)\frac{\partial (w_u r)}{\partial r} \end{aligned}\right| \qquad (21a)$$

Multiplizieren wir diese beiden Formeln mit dz bezw. dr und addieren, so folgt wegen (20)

$$d\chi = \left(\frac{w_u}{r} - \omega\right)\frac{d(w_u r)}{q_u r}. \qquad (22)$$

Mit $w_u\,dt = r\,d\varphi$ folgt weiter aus (19)

$$d\chi = d\varphi - \omega dt = \frac{r\,d\varphi}{w_u}\left(\frac{w_u}{r} - \omega\right)$$

und im Verein mit (22)

$$d\varphi = \frac{w_u}{r}\,\frac{d(w_u r)}{q_u r} \qquad (23)$$

Die beiden Formeln (22) und (23) besagen aber, daß die Änderungen sowohl des relativen, als auch des absoluten Drehwinkels der Flüssigkeitsbahnen aller Elemente zwischen zwei Niveauflächen $w_u r$ dieselben Beträge besitzen. Dies wiederum ist nur möglich, wenn diese Winkel Funktionen von $w_u r$ selbst sind, bzw. wenn dies für die Integration der rechten Seite von (22) und (23) zutrifft, d. h. wenn

$$\frac{(w_u r) - \omega r^2}{q_u r^3} = F_1(w_u r), \quad \frac{(w_u r)}{q_u r^3} = F_2(w_u r)$$

ist. Daraus folgt dann sofort durch Elimination von q_u eine Beziehung

$$w_u r = f(r) \qquad (13a)$$

d. h. in einem Kreiselrade mit gleichem

Energieumsatz aller Flüssigkeitselemente ist das Moment der Rotationskomponente der absoluten Flüssigkeitsgeschwindigeit nur mit dem Radius veränderlich, und die Niveauflächen $(w_u r)$ werden konzentrische Kreiszylinder um die Drehachse. Alsdann verschwindet aber mit $\partial(w_u r):\partial z$ nach (21a) auch die Komponente q_z, d. h. die Schaufeln selbst können nur Zylinder mit Erzeugenden und Kanten parallel zur Drehachse sein. Da schließlich auch der Radialwirbel ε_r nach (3a) hierbei verschwindet, so geht (14) über in

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{g}\int\int \varepsilon \; r\,dr\,dQ, \qquad (14a)$$

d. h. vollkommene Kreiselräder arbeiten nur mit dem Axialwirbel und sind nicht in der Lage, durch ihre Schaufeln einen Axialschub auszuüben.

Wegen (13a) ist natürlich auch der durch (22) definierte Relativwinkel χ eine reine Radialfunktion und folglich nach (20) mit $q_z = 0$ auch

$$\frac{d\chi}{dr} = -\frac{q_r}{q_u r}, \qquad (20a)$$

Hierfür dürfen wir aber mit (4a) und (5)

$$q_u r = w_r \frac{\partial(w_u r)}{\partial r} \qquad (5a)$$

setzen und erhalten mit (21a)

$$\frac{d\chi}{dr} = -\frac{1}{w_r}\left(\frac{w_u}{r} - \omega\right), \qquad (20b)$$

woraus wegen der Unabhängigkeit der linken Seite von z sowie wegen des Verschwindens des Ringwirbels (15)

$$\frac{\partial w_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_z}{\partial r} = 0 \qquad (15b)$$

folgt. Es kann also in einem vollkommenen Kreiselrad die Radialkomponente der absoluten Flüssigkeitsgeschwindigkeit nur eine Funktion von r, die Axialkomponente nur eine solche von z sein. Setzen wir demgemäß

$$w_r = \Phi_1(r), \quad w_z = \Phi_2(z) \qquad (15c)$$

in die Formeln (7) ein, so ergibt sich weiter

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -r\Phi_1(r), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = r\Phi_2(z)$$

oder

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = \Phi_2(z),$$

d. h. die Stromfunktion eines vollkommenen Kreiselrades muß linear in z und quadratisch in r sein. Wegen der Symmetrie um die Achse übersieht man, daß es sich im letzteren Falle um eine rein quadratische Funktion von r handeln muß. Da ferner Strömungen durch die Achse selbst, welche weder eine Quelle noch eine Senke bilden kann, unmöglich sind, so muß längs derselben $\Psi = 0$ sein, so daß auch kein von r^2 freies Glied auftritt. Damit reduziert sich die gesuchte Funktion auf

$$\Psi = (Az + B)r^2$$

oder, wenn wir den Anfang so wählen, daß B verschwindet

$$\Psi = Ar^2 z. \qquad (6a)$$

Diese Stromfunktion stellt somit das den Bedingungen unseres Problems genügende Integral der Kontinuitätsgleichung (2a) dar und liefert im Meridianschnitt den in Fig. 5 wiedergegebenen Stromverlauf.

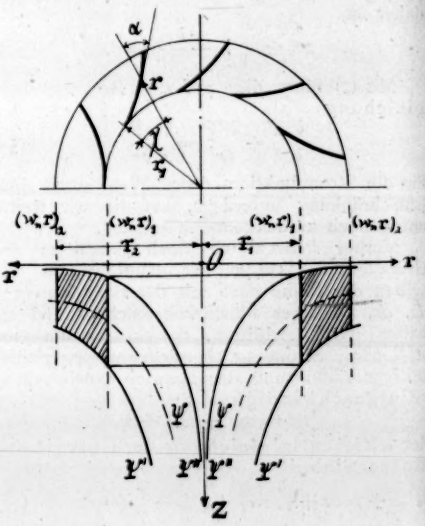


Fig. 5.

Mit (7) folgt schließlich aus (6b)

$$w_z = 2Az, \quad w_r = -Ar, \qquad (7a)$$

wonach das Vorzeichen der Konstanten A maßgebend dafür ist, ob die Arbeitsflüssigkeit das Rad von außen nach innen oder umgekehrt durchströmt. Die Stromrichtung in diesen Rädern, für welche neben dem Ringwirbel auch der Radialwirbel verschwindet, verläuft nun in jedem Falle vorwiegend radial, weshalb wir sie als Radialräder bezeichnen wollen. Die Form der Schaufeln in denselben hängt dagegen bloß noch von der Wahl der Funktion (13a) für $w_u r$ ab und ist somit ganz willkürlich. Daher wird man für die Leitlinien der Schaufelzylinder in der Praxis bequem zu verzeichnende Kurven, z. B. Kreisbogen, benutzen, welche sich allen

Bedingungen eines konkreten Falles leicht anpassen. Meistens knüpft man die Rechnung an den Winkel α, der Schaufelkurve im Grundriß mit dem Radius (Fig. 5) an, der sich aus

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w_u - \omega r}{w_r} \qquad (24)$$

berechnet und mit (7a) für den Ein- und Austritt auf

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\omega}{A} - \frac{w_{u2}}{A r_2}, \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\omega}{A} - \frac{w_{u1}}{A r_1} \qquad (24a)$$

führt. Beachtet man dann noch, daß der Innenraum dieser Räder, der bei Turbinen mit äußerem Wassereintritt und deren Umkehrung, den Schleuderpumpen bezw. Schleudergebläsen gleichmäßig als Saugraum bezeichnet wird, aus Herstellungsgründen keine Leitschaufeln erhält, so folgt, daß in diesem Raum keine Wirbel erzeugt oder umgewandelt werden können. Deshalb sollte hier die Strömung rotationsfrei verlaufen, und daher $(w_u r)_1 = 0$ werden, womit die zweite Gleichung (24a) in

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\omega}{A} \qquad (24b)$$

sich vereinfacht. Nach Wahl dieses Winkels α_1 und der Winkelgeschwindigkeit ω bestimmt sich hiermit die Konstante A der Stromfunktion, während der Parameter Ψ, bzw. die Parameterdifferenz $\Psi - \Psi'$ der Außen- und Innenwand mit der Durchflußmenge Q aus (9) bzw. (9a) gegeben ist. Dann liefert die Energiegleichung (17b) den Parameter $(w_u r)_2$ der äußeren Niveaufläche, deren Radius r_2 entweder willkürlich angenommen wird, oder nach Wahl eines äußeren Schaufelwinkels α_2 sich aus (24a) bestimmt, während der Innenradius r_1 sich aus der im Saugrohr gewünschten Axialgeschwindigkeit berechnet. In der Energiegleichung kann man schließlich noch den bisher nicht berücksichtigten, theoretisch überdies vorläufig nicht faßbaren Reibungsverlusten durch Einführung eines Wirkungsgrades angenähert gerecht werden.

Die praktische Anwendung der vorstehenden Theorie bzw. die spezielle Berechnung der verschiedenen Gattungen von Kreiselrädern würde naturgemäß an dieser Stelle zuweit führen, ich muß deshalb hierfür auf meine Monographie „Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder" (München 1906) verweisen, in welcher verschiedene Zahlenbeispiele vollständig durchgeführt sind. Das Schlußkapitel dieses Buches enthält auch noch die Theorie der als Axialräder anzusehenden Schraubengebläse, Propeller und Axialdampfturbinen, für welche die für gleichmäßigen Energieumsatz aller Elemente unerläßliche Gleichung (13a) $w_u r = f(r)$ nicht mehr gültig ist. Fordert man für diese Räder z. B. das Verschwinden des Axialwirbels ε_z neben dem Ringwirbel, so würde man aus (14) für das Drehmoment

$$\mathfrak{M} = -\frac{2}{g}\int\int \varepsilon_r \, r \, dr \, dQ \qquad (14b)$$

erhalten, während mit

$$(w_u r) = f(z) \qquad (13b)$$

in (21a) jetzt die für den Axialschub maßgebende Komponente q_z der Schaufelreaktion nicht mehr verschwindet, deren Existenz in der Tat gerade die Wirkung der Schraubengebläse und Propeller bedingt. Dagegen würde q_r verschwinden, d. h. die Flügel dieser Räder müßten nach Schraubenflächen geformt sein. Fordert man dagegen im Einklang mit (13b) einen gleichen Energieumsatz aller Flüssigkeitselemente, so erhält man schraubenartige Flächen mit axial und radial veränderlichen Steigung (Fig. 6), welche sich

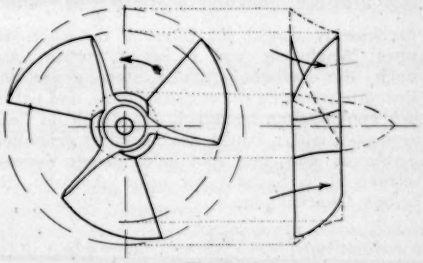


Fig. 6.

auch für Propeller schon praktisch bewährt haben (siehe meine Arbeit „Vergleichsversuche an Schiffsschrauben" Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1907. Heft 1). Der hierin liegende Widerspruch bringt es mit sich, daß die Strömung in Axialrädern im Gegensatz zu den Radialrädern überhaupt nur angenähert verfolgt werden kann, wenn auch die erzielte Approximation praktisch vollkommen genügt. Die gewöhnliche Schraubenfläche mit konstanter Steigung erscheint jedenfalls hiernach als eine noch gröbere Annäherung, welche mit der Stoßfreiheit und der Kontinuität der Strömung unvereinbar ist.

Danzig-Langfuhr, im Januar 1907.

(Eingegangen 5. Februar 1907.)

Über das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen.

Von G. Herglotz.

Herr H. Benndorf hat in seiner zweiten Mitteilung „Über die Art der Fortpflanzung

von Erdbebenwellen im Erdinnern"[1]), in welcher er auf Grund der Erdbebenbeobachtungen ein neues Moment für die Richtigkeit der E. Wiechertschen Theorie des Erdinnern beibrachte, die folgende Aufgabe gestellt: Ist die Laufzeit T, welche das von einem an der Erdoberfläche liegenden Erdbebenherd ausgehende Beben braucht, um durchs Erdinnere hindurch zum Beobachtungsort zu gelangen, als Funktion der Stoßdistanz Δ (d. i. der auf der Erdoberfläche gemessenen Entfernung desselben vom Herd) für alle Δ des Intervalles $0 \leq \Delta \leq \pi r_0$ (r_0 Erdradius), — also die Laufzeitkurve $T = T(\Delta)$ gegeben, so soll daraus unter Annahme eines kugelförmig geschichteten Erdkörpers, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Beben in den verschiedenen Schichten, — also als Funktion der (in Einheiten des Erdradius ausgedrückten) Entfernung ϱ vom Erdmittelpunkt gefunden werden. Herr Benndorf setzt nun über die von ihm sog. kritische Funktion $\varphi(\varrho) = \varrho \frac{c_0}{c}$ (c_0 = Oberflächenwert von c) im Intervall $0 \leq \varrho \leq 1$ stetiges Wachstum von 0 bis 1 voraus, wonach die Erdbebenstrahlen stets gegen den Erdmittelpunkt zu konvex gekrümmt, und natürlich symmetrisch bezüglich des durch ihr Perizentrum (tiefster Punkt des Strahles) gehenden Erdradius sind, und gibt unter dieser Voraussetzung (l. c. S. 955) für seine Aufgabe die beiden Gleichungen:

$$\Delta = 2 r_0 \alpha \int_{\varrho_m}^{1} \frac{d \lg \varrho}{\sqrt{\varphi^2(\varrho) - \alpha^2}}, \quad \alpha = \varphi(\varrho_m) \qquad (1)$$

$$\frac{dT}{d\Delta} = \frac{1}{c_0} \alpha, \qquad (2)^2)$$

in denen ϱ_m die in Einheiten des Erdradius ausgedrückte Entfernung des Perizentrums vom Erdmittelpunkt, die Perizentraldistanz des Strahles bedeutet. Die zahlenmäßige Durchrechnung seines Problems hat Herr Benndorf auf indirektem, synthetischen Wege bewerkstelligt. Jedoch läßt sich dasselbe auch sofort auf eine zuerst von Abel[3]) gelegentlich einer ganz ähnlichen Fragestellung gelösten Integralgleichung zurückführen, und da die so zu gewinnende Lösung eine einfache auch für die numerische Rechnung praktikable Form besitzt, mag ihre Mitteilung, zunächst für den einfachsten Fall, vielleicht nicht ganz überflüssig sein. — Zuvor eine Bemerkung über die Brennfläche des ganzen vom Erdbebenherd auslaufenden Strahlenbündels. Die Betrachtung desselben zeigt ohne weiteres, daß ein Strahl die Brennfläche höchstens einmal berühren kann, und zwar kann dieser Berührungspunkt — der Brennpunkt des Strahles — nur zwischen Perizentrum und Beobachtungsort liegen. Gleichzeitig erkennt man, daß ein bestimmter Strahl die Brennfläche berührt oder nicht, je nachdem für ihn $\frac{d^2T}{d\Delta^2} > 0$ oder < 0 ist.[1])

Das Kriterium dafür, daß es überhaupt keine Brennfläche gibt, ist demnach dieses, daß beständig $\frac{d^2T}{d\Delta^2} < 0$ ausfällt, oder die Laufzeitkurve überall gegen die Δ-Achse konkav gekrümmt ist. An dieser Voraussetzung soll nun, um hier zunächst bloß die einfachsten Verhältnisse zu betrachten, festgehalten werden. Dann wird aber $\alpha = c_0 \frac{dT}{d\Delta}$ eine im Intervall $0 \leq \Delta \leq \pi x_0$ von $\alpha = 1$ bis $\alpha = 0$ beständig abnehmende Funktion von Δ sein, also umgekehrt $\frac{\Delta}{\alpha}$ als eine im Intervall $0 \leq \alpha \leq 1$ wohldefinierte und aus der Laufzeitkurve bekannte Funktion von α: $\frac{\Delta(\alpha)}{\alpha}$ angesehen werden können. Der früher über $\varphi(\varrho)$ gemachten Voraussetzung zufolge wird ebenso durch $y = \varphi^2(\varrho)$ die Größe ϱ als eine im Intervall $0 \leq y \leq 1$ von $\varrho = 0$ bis $\varrho = 1$ beständig zunehmende Funktion von y: $\varrho(y)$ definiert sein, welche den Wert $\varrho = \varrho_m$ für $y = \alpha^2 = x$ annimmt, und in deren Ermittlung die Aufgabe besteht. Gemäß dieser Festsetzung stellt sich jetzt Gleichung (1) so dar:

$$H(x) = \frac{\Delta(x^2)}{2 r_0 x^2} = \int_x^1 \frac{d \lg \varrho}{\sqrt{y - x}}, \qquad (1')$$

wo nun $H(x)$ bekannt, $\lg \varrho(y)$ zu finden ist. Die von Abel gegebene Lösung lautet unmittelbar:

$$\int_y^1 d \lg \varrho = \frac{1}{\pi} \int_y^1 \frac{H(x)\, dx}{\sqrt{x - y}} = -\frac{2}{\pi} \int_y^1 \sqrt{x - y}\, dH. \qquad (3)$$

Ist nun $T_1(\Delta_1)$ genau dieselbe Funktion T_1 von Δ_1 wie T von Δ, so kann wieder wegen der über die Laufzeitkurve gemachten Voraussetzung durch:

1) Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie in Wien. Math.-Naturw. Klasse. I. Mitteilung vom 19. Oktober 1905. Bd. 114. II. Mitteilung vom 10. Mai 1906, Bd. 115. Vgl. auch die anschließenden Publikationen von E. Wiechert, welche einem in der hiesigen math. Gesellschaft gehaltenen Vortrage nach demnächst in den Göttinger Nachrichten erscheinen sollen.

2) Diese Gleichung ergibt sich einfacher als bei Herrn Benndorf aus dem allgemeinen Satz von der Differenz der „optischen Weglängen" benachbarter Strahlen.

3) Crelles Journal, Bd. 1 (1826). Auflösung einer mechanischen Aufgabe. Oeuvres. I. pag. 97.

1) Die Perizentraldistanz nimmt mit wachsender Stoßdistanz im ersten Falle zu, im zweiten ab. Der Berührungspunkt liegt für $\frac{d^2T}{d\Delta^2} = 0$ im Perizentrum, was mit der Voraussetzung über $\varphi(\varrho)$ aber unverträglich ist, für $\frac{d^2T}{d\Delta^2} = \infty$ im Beobachtungsort.

$$x = c_0^2 \left(\frac{dT_1}{d\Delta_1}\right)^2, \qquad y = c_0^2 \left(\frac{dT}{d\Delta}\right)^2 \tag{4}$$

das Integral in (3) direkt auf die Laufzeitkurve bezogen werden, wonach vermöge,

$$\lg \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\pi r_0} \int_0^{\Delta} \sqrt{\left(\frac{dT_1}{d\Delta_1}\right)^2 - \left(\frac{dT}{d\Delta}\right)^2} d\Delta \cdot \frac{\Delta_1}{\frac{dT_1}{d\Delta_1}} \tag{3'}$$

und

$$\varphi(\varrho) = c_0 \frac{dT}{d\Delta}. \tag{5}$$

$\varphi(\varrho)$ und ϱ beide als Funktionen von Δ bekannt sind, welche sich eindeutig ergebende Lösung, aber auch hinterher allen Bedingungen entspricht. Insbesondere folgt aus (3') $\frac{d\varrho}{d\Delta} < 0$ und hiermit aus (5) $\varphi'(\varrho) > 0$. In diesem einfachsten Falle ist also auch Herrn Benndorfs (l. c., S. 956) ausgesprochene Vermutung bezüglich der Existenz der Lösung bestätigt. Etwas anders gestaltet sich die Sachlage in dem hier ausgeschlossenen Falle, wo eine Brennfläche auftritt. Diesen, sowie die zu treffenden Maßnahmen, wenn die Voraussetzung über $\varphi(\varrho)$ nicht erfüllt werden kann, denke ich in einer zweiten Notiz zu schildern.

Göttingen, den 10. Februar 1907.

(Eingegangen 12. Februar 1907.)

Über den Zusammenhang der thermodynamischen Hypothese von Nernst mit dem Koppschen Gesetz.

Von Ferencz Jüttner.

§ 1. Die Gleichung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik

$$A = Q + T\frac{dA}{dT} \tag{1}$$

stellt, wie man besonders aus der Form

$$\frac{dA}{dT} - \frac{A}{T} = -\frac{Q}{T} \tag{1a}$$

ersieht, in mathematischer Hinsicht eine lineare unhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung dar. Ihr allgemeines Integral ist daher, wenn Q eine bekannte stetige Funktion von T bedeutet,

$$A = -T\int \frac{Q}{T^2} dT + C \cdot T, \tag{2}$$

wo C eine unbekannte gegenüber der Integrationsvariabeln T konstante Größe ist. Die Richtigkeit dieser Lösung erkennt man, indem man (2) differenziert:

$$\frac{dA}{dT} = -\int \frac{Q}{T^2} dT - \frac{Q}{T} + C; \tag{3}$$

beim Einsetzen befriedigen dann (2) und (3) die Gleichung (1).

Um nun bei chemischen Reaktionen nach Gleichung (2) aus der Wärmeentwicklung Q die maximale Arbeit A vollständig berechnen zu können, muß man zum 2. Hauptsatz noch eine Beziehung hinzufügen, durch die die vorläufig unbekannte Integrationskonstante C bestimmt wird. Nernst[1]) hat nun in zwei hervorragenden Arbeiten die neue Hypothese aufgestellt, daß bei kondensierten Systemen die Gleichung gilt:

$$\lim_{T=0} \frac{dA}{dT} = \lim_{T=0} \frac{dQ}{dT}. \tag{4}$$

Daraus folgert er für diesen Fall

$$C = 0, \tag{5}$$

so daß hier

$$A = -T\int \frac{Q}{T^2} dT \tag{6}$$

die gewünschte Lösung ist. Ferner gewinnt er im Gange der Rechnung aus der Gleichung (4) auch eine besondere wichtige Eigenschaft von Q, nämlich:

$$\lim_{T=0} \frac{dQ}{dT} = 0 \tag{7}$$

oder unter Benutzung des 1. Hauptsatzes in speziell chemischer Fassung:

Beim absoluten Nullpunkt hat das Koppsche Gesetz der Additivität der Molekularwärmen für flüssige wie feste Körper strenge Gültigkeit.

Es soll nun im folgenden auf eine der Nernstschen Hypothese zukommende Eigentümlichkeit hingewiesen werden, die zwar implizit schon in den Rechnungen ihres Autors vollständig enthalten ist, aber dort gar nicht besonders hervorgehoben wird. Die Nernstsche Beziehung zwischen A und Q, Gleichung (4), besteht nämlich aus zwei wesentlich verschiedenen Aussagen, deren erste schon vielfach auch früher als gültig angesehen wurde und einen allgemeineren Charakter besitzt und deren zweite das eigentlich Neue des Prinzips darstellt; das Koppsche Gesetz beruht dann auf dem ersten Teil allein.

§ 2. Um zum ersten Teile des Nernstschen Prinzips zu gelangen, setzen wir den 2. Hauptsatz Gleichung (1) für den absoluten Nullpunkt an:

$$\lim_{T=0} A = \lim_{T=0} Q + \lim_{T=0} \left(T\frac{dA}{dT}\right) \tag{8}$$

und machen, wie üblich, die Hypothese, daß diese auf $T = 0$ bezogene Gleichung das Berthelotsche Prinzip darstellt:

$$A_0 = Q_0. \tag{9}$$

Hierin liegen die drei Teilhypothesen, daß die beiden physikalischen Größen $\lim_{T=0} A$ und $\lim_{T=0} Q$ endlich sind:

1) Gött. Nachr. 1906, Heft 1, S. 1—40; Berl. Ber. 1906, S. 933—940.

$$\lim_{T=0} A = A_0, \qquad \text{(I)}$$

$$\lim_{T=0} Q = Q_0 \qquad \text{(II)}$$

und daß

$$\lim_{T=0}\left(T\frac{dA}{dT}\right) = 0. \qquad \text{(III)}$$

Die Beziehung (III) verlangt, daß $\lim_{T=0}\frac{dA}{dT}$ entweder endlich (insbesondere Null) oder schwächer als von der ersten Ordnung unendlich ist. Je nachdem man sich hier entscheidet, legt man, da $\frac{dA}{dT}$ nach Gleichung (3) mit Q zusammenhängt, auch der Funktion Q gewisse Bedingungen auf. Die größte Wahrscheinlichkeit besitzt nun wohl die Annahme, daß $\frac{dA}{dT}$ beim absoluten Nullpunkt eine „vernünftige" physikalische Größe darstellt, d. h. endlich ist, und die meisten Autoren, die die Meinung aussprachen, daß der zweite Hauptsatz sich für $T = 0$ auf die Gleichung $A = Q$ reduziert, haben wohl stillschweigend diese nächstliegende Hypothese gemacht. Es gelte also:

$$\lim_{T=0}\frac{dA}{dT} = c_0, \text{ wo } c_0 \text{ endlich.} \qquad \text{(III')}$$

Gleichung (III′) hat nun die Gültigkeit von (III) zur Folge, ebenso aber auch von (I), und daher sind schon die beiden speziellen Annahmen (III′) und (II) für die Gültigkeit von (9) hinreichend. Die vor allem bedeutsame Gleichung (III′) bildet nun aber einen ersten Bestandteil der Nernstschen Hypothese, wie man durch Vergleichung von (4) und (7) erkennt. Es handelt sich also jetzt um die Frage, welche Eigenschaft von Q aus diesem ersten Teile, der Endlichkeit von $\left(\frac{dA}{dT}\right)_0$, folgt.

§ 3. Es ist mathematisch recht schwierig, aus den Gleichungen (III′) und (3) allein Folgerungen zu ziehen, solange man Q nur als stetig voraussetzt, und diese Folgerungen würden sehr allgemein und daher physikalisch wenig interessant ausfallen.

Daher machen wir jetzt vorläufig mit Nernst die weitere Annahme, daß Q eine an der Stelle $T = 0$ reguläre Funktion ist, d. h. nach der Mac Laurinschen Reihe, die event. von selbst abbricht, entwickelt werden kann:

$$Q = Q_0 + \alpha T + \beta T^2 + \gamma T^3 + \ldots \qquad (10)$$

Damit ist auch Gleichung (II) erfüllt. Dann gibt Gleichung (3)

$$\frac{dA}{dT} = -\alpha(\ln T + 1) - 2\beta T - \\ -\frac{3}{2}\gamma T^2 - \cdots + C. \qquad (11)$$

Folglich ist:

$$\lim_{T=0}\frac{dA}{dT} = -\alpha\cdot(\lim_{T=0}\ln T + 1) + C. \qquad (12)$$

Soll also $\frac{dA}{dT}$ beim absoluten Nullpunkt endlich bleiben, so muß, wie bei Nernst, gelten:

$$\alpha = 0 \qquad (13)$$

und Gleichung (10) in die Form übergehen:

$$Q = Q_0 + \beta T^2 + \gamma T^3 + \cdots, \qquad (14)$$

aus der die Beziehungen folgen:

$$\frac{dQ}{dT} = 2\beta T + 3\gamma T^2 + \cdots \qquad (15)$$

$$\lim_{T=0}\frac{dQ}{dT} = 0. \qquad (16)$$

Man erkennt aus diesen Erörterungen, deren letzter Teil direkt auf die Rechnungen von Nernst führte: schon aus der Annahme, daß $\frac{dA}{dT}$ beim absoluten Nullpunkt endlich bleibt, folgt für $T = 0$ die Gültigkeit des Koppschen Gesetzes, falls Q für $T = 0$ regulär ist.

Zugleich ergibt sich aus (12), (13) und (III′)

$$c_0 = C, \qquad (17)$$

d. h. c_0 ist identisch mit der Integrationskonstanten C in Gleichung (2).

Endlich seien hier noch die unter Benutzung des Wertes von Q in Gleichung (14) aus (2) und (3) folgenden Ausdrücke für A, $\frac{dA}{dT}$ und $\lim_{T=0}\frac{dA}{dT}$ hingeschrieben:

$$A = Q_0 - \beta T^2 - \gamma_2 T^3 - \cdots + C\cdot T; \qquad (18)$$

$$\frac{dA}{dT} = -2\beta T - \frac{3}{2}\gamma T^2 - \cdots + C; \qquad (19)$$

$$\lim_{T=0}\frac{dA}{dT} = C. \qquad (20)$$

Die drei letzten Gleichungen sind denen von Nernst analog, aber nicht mit ihnen identisch, da hier noch die unbekannte Konstante C auftritt.

§ 4. Will man nicht von vornherein Q als in eine Potenzreihe von T entwickelbar annehmen, so führt auch folgender Gedankengang zur Ableitung des Koppschen Gesetzes. Gleichung (III′) ist erfüllt und $\lim_{T=0}\frac{dA}{dT}$ sicher endlich, wenn A an der Stelle $T = 0$ regulär ist, also auch $\lim_{T=0}\frac{d^2A}{dT^2}$, $\lim_{T=0}\frac{d^3A}{dT^3}$ usw. endlich sind. Dies kann man als physikalisch plausibel ansehen; außerdem stimmt es mit dem Ansatz von Nernst überein, wie man an seinem Ausdruck für A, Gleichung (27), s. u., erkennt. Nun folgt aus Gleichung (1) durch Differenzieren:

$$\frac{d^2A}{dT^2} = -\frac{1}{T}\frac{dQ}{dT}. \qquad (21)$$

Es ist also $\lim_{T=0} \frac{d^2A}{dT^2}$, ebenso offenbar $\lim_{T=0} \frac{d^3A}{dT^3}$, $\lim_{T=0} \frac{d^4A}{dT^4}$ usw. endlich, wenn

$$-\frac{1}{T}\frac{dQ}{dT} = f(T) \qquad (22)$$

gilt, wo $f(T)$ eine bei $T=0$ reguläre, also nach der Mac Laurinschen Reihe entwickelbare Funktion ist. Jetzt dürfen wir also mit gutem Grunde setzen, indem wir sofort die Bezeichnungsweise geeignet wählen:

$$-\frac{1}{T}\frac{dQ}{dT} = -2\beta - 3\gamma T - 4\delta T^2 - \cdots \qquad (23)$$

und bekommen durch Integration:

$$Q = Q_0 + \beta T^2 + \gamma T^3 + \delta T^4 + \cdots, \qquad (24)$$

wo also wieder, wie in Gleichung (14), der Koeffizient von T Null ist. Die weiteren Entwickelungen sind dieselben wie in § 3 und man hat das Resultat:

Soll A an der Stelle $T=0$ selbst mit sämtlichen Differentialquotienten endlich sein, so muß Q in eine nach Potenzen von T fortschreitende Reihe entwickelbar sein, und deren lineares Glied muß fehlen (Koppsches Gesetz).

Wie man aus dem Vergleich der beiden Ableitungen in § 3 und 4 sieht, bedingen die Entwickelbarkeit von A nach Potenzen von T und diejenige von Q (letztere unter Wegfall des linearen Gliedes) sich gegenseitig. Dies findet man bestätigt, indem man die Koeffizienten der Entwicklungen von A in Gleichung (18) und von Q in Gleichung (14) miteinander vergleicht; man findet:

$$\left.\begin{array}{c} A = A_0 \\ \left(\frac{dA}{dT}\right)_0 = C, \quad \left(\frac{dQ}{dT}\right)_0 = 0 \\ -\left(\frac{d^2A}{dT^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2Q}{dT^2}\right)_0 = 2\beta \\ -\left(\frac{d^3A}{dT^3}\right)_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^3Q}{dT^3}\right)_0 = 3\gamma \\ - - - - - - - - - - - - \end{array}\right| \qquad (25)$$

Hiermit ist auch eine doppelte physikalische Bedeutung der Koeffizienten β, γ ... gegeben, die man chemisch im wesentlichen als Temperaturkoeffizienten 1., 2., 3. ... Ordnung spezifischer Wärmen zu deuten hat.

§ 5. Ehe wir weiter gehen, möge zu einigen neueren Arbeiten kurz Stellung genommen werden, die vor dem Erscheinen der Abhandlungen von Nernst entstanden sind und daher dessen Hypothese noch nicht benützen. Unter der Voraussetzung, daß Q eine lineare Funktion von T ist, hat van't Hoff[1]) bereits 1904 den 2. Hauptsatz integriert. Ganz ähnliche Entwicklungen gaben H. v. Jüptner[1]), F. Haber[2]) und Brönsted.[3]) Als Beispiel möge der folgende allgemeine Ansatz von Brönsted besprochen werden, der diejenigen der anderen genannten Autoren in sich als Spezialfälle enthält.

Brönsted setzt analog zu Gleichung (10)

$$Q = a + bT + cT^2 + dT^3 + eT^4 + \cdots$$

und findet daher entsprechend der Gleichung (11)

$$\frac{dA}{dT} = -b\ln T - 2cT - \frac{3}{2}dT^2 - \\ -\frac{4}{3}eT^3 - \cdots + k.$$

Da die Funktion Q nicht weiter spezialisiert wurde, so wird, wie man sieht, für $T=0$ hier $\lim \frac{dA}{dT}$ unendlich. Doch da dies in logarithmischer Weise geschieht, so ist die Gleichung

$$\lim_{T=0}\left(T\frac{dA}{dT}\right) = 0 \qquad (III)$$

erfüllt und somit das Berthelotsche Prinzip $A_0 = Q_0$ trotzdem gültig, worauf der Verfasser ausdrücklich hinweist.[4])

Bildet man noch:

$$\frac{d^2A}{dT^2} = -\frac{b}{T} - 2c - 3dT - 4eT^2 - \cdots$$

$$\frac{d^3A}{dT^3} = +\frac{b}{T^2} - 3d - 8eT - \cdots$$

$$\frac{d^4A}{dT^4} = -\frac{2b}{T^3} - 8e - \cdots.$$

— — — — — — — — — — —

so erkennt man, daß hier überhaupt sämtliche Differentialquotienten vom ersten an für $T=0$ unendlich werden, so daß A, obwohl es selbst für $T=0$ den endlichen Wert A_0 hat, sich an dieser Stelle doch ganz singulär verhält. Dieser Punkt stellt einen Mangel sämtlicher oben genannten Arbeiten dar und macht ihre Resultate mit denen der Nernstschen Theorie schwer vergleichbar. Man muß eben jene physikalisch unwahrscheinliche Singularität von A beseitigen, und dies geschieht, wie besonders in § 4 gezeigt, indem man einfach $b=0$ setzt, d. h. das lineare Glied in Q unterdrückt. Dann wird man von selbst darauf geführt, noch das quadratische Glied in Q zu berücksichtigen, dessen große Bedeutung in den genannten Arbeiten nicht erkannt werden konnte und das daher vielfach, z. B. von van't Hoff, wie schon erwähnt, nicht in die Rechnung eingeführt wurde. Mit der Annahme $b=0$ dagegen erhielte man ohne weiteres zwar nicht die eigentlichen Gleich-

1) Boltzmannfestschrift 1904, S. 234.

1) Vgl. die Besprechung bei Brönsted, l. c. S. 658.
2) Thermodynamik technischer Gasreaktionen 1905.
3) Zeitschr. f. phys. Chemie **58**, 647. 1906.
4) Brönsted, l. c. S. 648.

ungen von Nernst, aber wohl die ihnen ganz analogen Gleichungen (18), (19) und (20) (s. ob.).

§ 6. Nunmehr ist noch in Kürze der zweite Teil und zwar der eigentliche Kernpunkt der Nernstschen Hypothese zu behandeln. Um nämlich die Integrationskonstante in Gleichung (2) universell zu bestimmen, werde für kondensierte Systeme die Annahme gemacht, daß der endliche Wert von $\lim_{T=0} \frac{dA}{dT}$ speziell Null sei:

$$\lim_{T=0} \frac{dA}{dT} = 0, \text{ d. h. } C = 0. \qquad (26)$$

In der Tat ist dann wegen (16) die Fundamentalbeziehung

$$\lim_{T=0} \frac{dA}{dT} = \lim_{T=0} \frac{dQ}{dT} \qquad (4)$$

erfüllt, und die Gleichungen (18) und (19) gehen für $C = 0$ unmittelbar in die entsprechenden von Nernst über:

$$A = Q_0 - \beta T^2 - \frac{\gamma}{2} T^3 - \cdots \qquad (27)$$

$$\frac{dA}{dT} = -2\beta T - \frac{3}{2}\gamma T^2 - \cdots. \qquad (28)$$

Breslau, den 11. Februar 1907.

(Eingegangen 15. Februar 1907.)

Bemerkung zu vorstehender Abhandlung von F. Jüttner.

Von O. Sackur.

Wie Jüttner im Anschluß an Nernst gezeigt hat (vgl. vorst. Abhandlung), folgt die Gültigkeit des Koppschen Gesetzes im wesentlichen aus der Annahme, daß $\frac{dA}{dT}$ am absoluten Nullpunkte endlich bleibt. Diese Bedingung erhält eine andere Form durch Berücksichtigung der bekannten Gleichung $S = -\frac{dA}{dT}$; S bedeutet die Änderung der Entropie, die bei isothermem Verlaufe der Reaktion eintritt. Würde also $\frac{dA}{dT}$, wie Brönsted u. a. annehmen, bei $T = 0$ logarithmisch unendlich, so müßte eine beim absoluten Nullpunkt verlaufende Reaktion mit einer unendlich großen Vermehrung oder Verminderung der Entropie des reagierenden Systems verbunden sein. Dies ist zwar thermodynamisch möglich, scheint aber, wie die Bestätigungen des Nernstschen Theorems zeigen, unzutreffend zu sein. Die Entropien der einzelnen Molekeln unterscheiden sich daher auch beim Nullpunkte um endliche Beträge.

Die weitere Hypothese von Nernst, daß die A- und die Q-Kurve sich für $T = 0$ berühren, führt zu der Folgerung, daß $-S = \frac{dA}{dT}$ am Nullpunkt $= 0$ wird, d. h. daß die Entropie bei allen bei dieser Temperatur verlaufenden Reaktionen konstant bleibt. Die Entropie ist dann beim Nullpunkte ebenso wie die spez. Wärme eine additive Eigenschaft der einzelnen Atome. Sollte es einmal gelingen, die Entropie der festen und flüssigen Stoffe ähnlich, wie es Boltzmann für Gase getan hat, molekulartheoretisch zu erklären, so wäre damit gleichzeitig die mechanische Deutung des Nernstschen Theorems gelungen.

Breslau, Februar 1907.

(Eingegangen 15. Februar 1907.)

Mitteilungen aus dem physikalischen Institut der Universität Bologna. (Direktor: A. Righi.)

No. 13[1]: Arciero Bernini, Über die spezifische Wärme des Calciums und des Lithiums.

In einer meiner früheren Mitteilungen[2]) wies ich auf Untersuchungen über die spezifische Wärme des Lithiums hin, mit denen ich damals gerade beschäftigt war. Ich teile nunmehr die Ergebnisse dieser Untersuchungen mit im Verein mit denen, die ich bei analogen Untersuchungen über das Calcium gewonnen habe.

Der Erwärmungsapparat und das Kalorimeter, die ich hierbei benutzt habe, waren dieselben wie bei meinen Untersuchungen am Natrium und am Kalium; nur die beiden Kapillaren des Kalorimeters sind ausgewechselt worden. Die Röhre für die tiefen Temperaturen wurde durch eine andere ersetzt, in welcher sich das Ende der Quecksilbersäule für jede Kalorie um 2,852 cm verschob. Die Röhre für die hohen Temperaturen ersetzte ich durch eine andere, in deren Mitte ich eine Erweiterung anbrachte, weil nämlich bei der großen spezifischen Wärme des Lithiums der kalibrierte Teil der Röhre nicht hinlänglich lang gewesen wäre. Der Querschnitt dieser Röhre war so bemessen, daß sich für jede Kalorie eine Verschiebung der Quecksilbersäule um 0,611 cm ergab, und das Volumen des kurzen aufgeblasenen Stückes der Röhre entsprach dem Volumen von 24,7 cm der Quecksilbersäule.

Lithium.

Die spezifische Wärme des Lithiums ist zuerst von Regnault[3]) zwischen 27° und 99°

1) No. 12: Diese Zeitschr. **7**, 228, 1906.

2) Über die spezifische Wärme und die latente Schmelzwärme des Kaliums und des Natriums. Diese Zeitschrift **7**, 168, 1906. — Sul calore spezifico e sul calore latente di fusione del Na e del Ka. N. Cim (5) **10**, 1905.

3) Ann. de Chimie et de Phys. (5) **3**, 63, 1861.

nach der Mischungsmethode bestimmt worden. In neuerer Zeit macht Herr Professor Kleiner[1]) Mitteilung von Versuchen nach dieser Richtung, die er angestellt hat. Er beschränkt sich indessen auf die Angabe, daß die spezifische Wärme des Lithiums mit zunehmender Temperatur sehr schnell anwächst, und daß sie oberhalb 100° bereits größer ist als die des Wassers.

Regnault verfuhr bei seinen Versuchen in folgender Weise: Er brachte einen Klumpen Lithium von 1 Gramm Gewicht, der nach dem Verfahren von Bunsen gewonnen worden war, durch Schlagen in die Gestalt eines kleinen regelmäßigen Zylinders. Darauf führte er ihn in ein kleines Gefäß aus Blei ein, verschloß dieses mit einem Pfropfen, der gleichfalls aus Blei bestand, und komprimierte durch Hammerschläge, so daß das Lithium von der Berührung mit der Luft abgeschlossen war. Er kannte nun das Gewicht des Lithiums und das des Gefäßes, sowie die spezifische Wärme des Bleies, und leitete dann aus der Wärmekapazität des gesamten aus den beiden Metallen bestehenden Systems die spezifische Wärme des Lithiums ab.

Da nun das Gewicht des Lithiums weniger als den hundertsten Teil des Gewichtes des Bleigefäßes betrug, so war es nicht unwahrscheinlich, daß dadurch das Ergebnis irgendwie beeinflußt sein könnte. Da anderseits die Reinheit der benutzten Metalle zweifelhaft war, so war ich bemüht, die Versuche unter Vermeidung des eben erwähnten Übelstandes zu wiederholen, und die Untersuchungen dabei gleichzeitig auch auf höhere Temperaturen auszudehnen. Indessen bestimmte ich nicht, wie beim Natrium und beim Kalium, die Schmelzwärme, weil sich das Bunsensche Kalorimeter der ziemlich hohen Schmelztemperatur wegen für diesen Zweck nicht recht eignet. Immerhin habe ich einige solche Bestimmungen gemacht, die mir allerdings Ergebnisse lieferten, welche zwischen 311 und 389 Kalorien schwankten; das Mittel aus diesen würde sicherlich noch einen viel zu großen Wert für die latente Schmelzwärme dieses Metalles ergeben.

Das Lithium, welches ich untersucht habe, war mir von der Firma Merck geliefert worden.[2])

Um es im Verlaufe der Untersuchungen vor der Berührung mit der Luft zu bewahren, habe ich es, gerade wie ich es mit dem Kalium und mit dem Natrium gemacht habe, unter Vaselinöl geschmolzen und es durch Aufsaugen in Glasfläschchen gefüllt, deren innere Wandungen mit einer Ölhaut überzogen waren. Diese Ölhaut war zwar außerordentlich dünn, so daß sie sicherlich keinen merklichen Fehler in den Ergebnissen hervorbringen kann, aber immerhin ausreichend, um ein Springen des Glases infolge der Berührung mit dem geschmolzenen Metall zu verhindern. Es gelang mir, drei Fläschchen vollständig mit Lithium zu füllen, ohne die geringste Spur einer Oxydation; aber so dünnwandig diese Fläschchen auch waren, so ergab sich doch ihr Gewicht ein wenig größer als das des in ihnen enthaltenen Metalles. Den auf Rechnung der Fläschchen zu setzenden Wärmeverlust berechnete ich auf Grund der Werte, die ich für das Glas gefunden hatte, und die in der Tabelle III meiner oben genannten Veröffentlichung angegeben sind.

In den folgenden Tabellen habe ich die Mittelwerte aus den Ergebnissen zusammengestellt, die ich mit den drei Fläschchen bei Zimmertemperaturen und bei den Siedetemperaturen des Alkohols (78°), des Wassers und des Terpentinöls erhalten habe; für die letztgenannte Temperatur gab das Thermometer des Heizofens 157° an. Der Verlust an Kalorien C wurde unter der Annahme berechnet, daß die Masse des Metalles immer 1 Gramm war.

Tabelle I.

Gewicht des Glases: 0,3 gr.
Gewicht des Lithiums: 0,216 gr.

t	C
0°—18°	15,696

Tabelle II.

Gewicht des Glases: 0,412 gr.
Gewicht des Lithiums: 0,301 gr.

t	C
0°— 21°	17,262
0°— 78°	76,83
0°—100°	112,5
0°—157°	214,61

1) Arch. sc. phys. et nat. (4) **6**, 1903.

2) Ich benutze diese Gelegenheit, um hier ein Ergebnis mitzuteilen, welches ich betreffs des Lithiums gewonnen habe. Es hat allerdings mit dem Gegenstand der vorliegenden Mitteilung eigentlich nichts zu tun, indessen halte ich es nicht für angebracht, es zum Gegenstand einer besonderen Veröffentlichung zu machen.

Matthiessen hat nämlich (Ann. de Chimie et de Phys. (3) **44**, 1855) folgendes Verhalten von *Ka*, *Na*, *Ca* und *Mg* festgestellt: Bringt man von diesen Metallen je zwei gleichzeitig in Wasser, so erzeugen sie in einem Leitungskreise, der ein Galvanometer enthält, einen Strom, der in der Richtung von dem früher genannten Metall zu dem später genannten verläuft. Es ist mir nun nicht nur gelungen, dieses Ergebnis, das heutzutage in Anbetracht der Verunreinigungen der von Matthiessen untersuchten Metalle zweifelhaft erscheinen konnte, zu bestätigen, sondern ich habe auch Gelegenheit gehabt, die Stellung festzulegen, welche dem Lithium in der genannten Reihe zukommt, was meines Wissens bisher noch nicht geschehen ist. Das Lithium müßte seine Stelle ganz am oberen Ende der genannten Reihe finden, das heißt es ist das am stärksten elektropositive unter den Alkalimetallen.

Tabelle III.

Gewicht des Glases: 0,298 gr.
Gewicht des Lithiums: 0,222 gr.

t	C
0^0— 19^0	17,504
0^0— 78^0	77,22
0^0—100^0	106,00
0^0—157^0	200,332

Als Mittelwerte aus diesen Tabellen erhält man die in der Tabelle IV angegebenen Werte, wobei ich mit c die spezifischen Wärmen bezeichne:

Tabelle IV.

t	C	c
0^0— 19^0,3	16,154	0,8366
0^0— 78^0	77,02	0,9875
0^0—100^0	109,25	1,0925
0^0—157^0	207,47	1,3215

Der Wert, den Regnault zwischen 27^0 und 99^0 angibt, ist 0,9408, also ein wenig kleiner als der von mir für sehr annähernd den gleichen Temperaturbereich gefundene Wert.

Calcium.

Gelegentlich der Veröffentlichung seiner Mitteilung über das nach ihm benannte Kalorimeter hat Bunsen[1]) nicht nur die Versuche an den Metallen, deren spezifische Wärme bekannt war, wiederholt, sondern er hat auch die spezifische Wärme anderer Metalle, unter anderen des Calciums untersucht. Sein Calcium war allerdings, wie dies auch heute geschieht, durch Elektrolyse aus Calciumchlorid gewonnen worden und auf Grund der von Bunsen selbst ausgeführten Analyse als vollkommen rein erachtet, hatte aber einen metallischen Glanz wie Gold, der sich an der Luft sofort infolge von Oxydation verlor.

Um das Calcium vor der Luft und vor allen Dingen vor dem in dem Probiergläschen seines Kalorimeters enthaltenen Wasser zu schützen, brachte Bunsen ein Stück in einen Glasbehälter mit einer Atmosphäre von Kohlensäure. Durch diesen Kunstgriff wurde indessen das Eintauchen in Wasser unmöglich gemacht: die Gesamtdichte des Glases, des darin enthaltenen Gases und des Calciums blieb nämlich unterhalb der Einheit, so daß er sich genötigt sah, den Behälter mit einer Umwicklung von Platindraht von hinlänglichem Gewicht als Ballast zu versehen. Bei 0,2823 Gramm Calcium betrug das Gewicht des Glasgefäßes 0,6683 Gramm und das des Platins 0,4239 Gramm. Er kannte nun die spezifische Wärme des Platins und die des Glases und berechnete so die spezifische Wärme des Calciums. Er fand dafür in dem Temperaturbereich zwischen 0^0 und 100^0 einmal den Wert 0,1722 und ein anderes Mal 0,1686, woraus sich ein Mittelwert von 0,1704 ergibt, und nicht von 0,1804, wie aus den Tabellen von Landolt und Börnstein, 3. Auflage 1905, Seite 383, hervorgeht.

Da das Calcium, wie es heutzutage rein dargestellt wird, den weißen Glanz des Silbers und nicht den gelben des Goldes zeigt, erschien es mir von Interesse, die Versuche auch am Calcium anzustellen und sie, wie beim Lithium, bis auf 157^0 auszudehnen.

Das von mir untersuchte Calcium war von der Art, wie es seit einiger Zeit von der Firma Armbracht Nelson & Co. in London in Form unregelmäßiger durch Elektrolyse aus Calciumchlorid gewonnener Stangen in den Handel gebracht wird. Seine Reinheit schwankt nach den Ergebnissen der Analysen von Moissan[1]) zwischen 99,3 und 99,6 v. H., und die Verunreinigungen beruhen auf Spuren von *Na* und *Fe*, und ganz besonders von *Si* und *Al*. Die ziemlich langsame Oxydierbarkeit des Materials hat mich dazu bestimmt, die Versuche auszuführen, ohne es irgendwie zu schützen. Ich konnte nämlich einen kleinen an beiden Enden ogival zugespitzten Zylinder daraus drehen, ihn abwägen und in das Kalorimeter einführen, bevor noch die Oberfläche ihren Metallglanz verloren hatte. Wenn er indessen in den Heizofen gebracht wurde, so oxydierte sich seine Oberfläche mit der Zeit ein wenig. Um diesen Übelstand zu vermeiden, füllte ich das Probiergläschen B (siehe Fig. 1) mit Wasserstoff und brachte den Zylinder hinein, sobald er abgedreht war, verschloß es dann mit einem doppeltdurchbohrten Stopfen, durch dessen eine Bohrung das Thermometer T und durch dessen andere Bohrung ein Glasrohr führte, das in der Weise gebogen war, wie aus der Figur ersichtlich wird, und ein wenig Quecksilber enthielt.

Es ist klar, daß der Wasserstoff, sobald er infolge der Erwärmung sein Volumen vergrößerte, das Quecksilber in die ausgebauchten Rohrteile trieb, wo dieses dann einen Tropfen bildete, welcher die Öffnung selbsttätig verschloß. Auf diese Weise konnte ich das Metall auch sehr lange Zeit im Ofen lassen, ohne daß eine Oxydation auftrat. Im geeigneten Augenblick wurde der Pfropfen gelüftet und der Heizkörper schnell umgestülpt, so daß das Metall nur einen ganz kurzen Augenblick der Luft ausgesetzt war.

Nicht selten wurden bei der Gewinnung der kleinen zu den Versuchen dienenden Zylinder

1) Pogg. Ann. **141**, 1870.

1) C. R. **140**, No. 3, Januar 1905.

Fig. 1.

aus einer Calciummasse in dieser kleine Kügelchen von Calciumchlorid angetroffen. Ich konnte daher nicht sicher sein, ob die untersuchten Zylinder von solchen Kügelchen frei waren, und es war daher nötig, sie nach den Versuchen in ihrem Innern zu untersuchen. Von den drei Zylindern, die ich untersucht habe, enthielt nur der größte ein Chloridkügelchen. Das Ergebnis für die spezifische Wärme war trotzdem nicht sehr abweichend von dem mit den beiden anderen Zylindern gefundenen. Das ist erklärlich, wenn man beachtet, daß die spezifische Wärme des Calciumchlorids der des reinen Metalles sehr nahe kommt. Ihr Wert ist nach Regnault[1]) zwischen 23^0 und $99^0 = 0{,}1692$.

Bei den ersten Versuchen hatten die drei kleinen Zylinder die Gewichte 5,096 Gramm, bezw. 2,25 Gramm und 3,231 Gramm. Infolge des wiederholten Nachpolierens für die späteren Versuche verringerten sich diese Gewichte schließlich bis auf 4,916 Gramm, 1,975 Gramm und 3,021 Gramm. Die Bestimmungen wurden also nicht immer mit derselben Masse ausgeführt.

In den folgenden Tabellen sind die Wärmeverluste in Kalorien indessen immer auf die Masse von 1 Gramm berechnet angegeben.

Tabelle V.
Erster Zylinder.

t	C
0^0—20^0	2,92

Tabelle VI.
Zweiter Zylinder.

t	C
0^0— 21^0	3,171
0^0— 78^0	11,368
0^0—100^0	14,200
0^0—157^0	23,1101

1) Pogg. Ann. **53**, 60 und 243, 1841.

Tabelle VII.
Dritter Zylinder.

t	C
0^0— 20^0	2,78
0^0— 78^0	11,544
0^0—100^0	15,600
0^0—157^0	24,624

Als Mittelwerte hieraus ergeben sich die Werte der Tabelle VIII, wo mit c die spezifischen Wärmen bezeichnet sind.

Tabelle VIII.

t	C	c
0^0— 20^0,3	2,956	0,1453
0^0— 78^0	11,460	0,147
0^0—100^0	14,90	0,149
0^0—157^0	23,867	0,1521

Die Übereinstimmung zwischen dem von Bunsen zwischen 23^0 und 99^0 erhaltenen Ergebnis mit dem von mir in dem zunächst gelegenen Temperaturintervall gefundenen Werte zeigt, daß die Verunreinigung, welche dem Calcium eine verschiedene Färbung mitteilt, keinen merklichen Einfluß in bezug auf die spezifische Wärme des Metalles aufweist.

Bald nach der Veröffentlichung meiner Arbeit über die Schmelzwärme des Natriums und des Kaliums erhielt ich durch die letzte Ausgabe der Tabellen von Landolt und Börnstein aus dem Jahre 1905 Kenntnis von einer Arbeit des Herrn M. A. Joannis über die Verbindungen des Natriums und des Kaliums.[1]) In dieser Arbeit bestimmt der französische Physiker, in der Absicht, die Bildungswärme der flüssigen Verbindungen des Natriums und des Kaliums zu berechnen, die Schmelzwärme dieser beiden Metalle und erhält für Natrium 15,7 Kalorien und für Kalium 31,7 Kalorien.

Dagegen waren die von mir gefundenen Werte 13,61 bezw. 17,75 Kalorien. Bei dieser gewaltigen Verschiedenheit, besonders was das Kalium betrifft, hielt ich es für angebracht, meine Versuche zu wiederholen, obwohl auf Grund der Angaben des Herrn Joannis über die von ihm zum Schutze der Metalle gegen Oxydation getroffenen Maßnahmen leicht zu ersehen ist, welcher Art und von welcher Größe die Fehlerquellen gewesen sein können, die seine Ergebnisse beeinflußt haben, und trotzdem ich mir bewußt war, bei der Ausführung meiner Versuche mit der allergrößten Sorgfalt vorgegangen zu sein.

Die neuen Ergebnisse, welche ich nunmehr

1) Ann. de Chimie et de Phys. (6) **12**, 1887.

sowohl für die spezifische Wärme als auch für die latente Schmelzwärme erhalten habe, bestätigen bei beiden Metallen durchaus meine früheren Resultate, insofern als die Abweichungen von diesen sich nur auf Bruchteile einer Kalorie belaufen.

Hieraus entsteht auch ein gewisser Zweifel an der Zuverlässigkeit der von Herrn Joannis für die Bildungswärme der flüssigen Verbindungen des Natriums und des Kaliums gegebenen Werte, da doch Herr Joannis diese Werte aus den von ihm für die Schmelzwärme der beiden reinen Metalle festgestellten berechnet hat.

Eine Erklärung für die gewaltige Verschiedenheit zwischen meinem Ergebnis und dem von Herrn Joannis für das Kalium gewonnenen könnte, mehr noch als in der von ihm bei seinen Untersuchungen beobachteten Methode, in der ungenügenden Reinheit der von ihm untersuchten Metalle zu finden sein. Infolge solcher Verunreinigungen trat wahrscheinlich das Schmelzen statt bei einer bestimmten Temperatur innerhalb eines ziemlich großen Temperaturintervalles ein. Diese Hypothese wäre nach meinem Dafürhalten die einfachste, obgleich Herr Joannis auf diesen Umstand nicht hinweist.

Es steht indessen fest, daß das von ihm für seine Versuche benutzte Kalium nicht rein war, denn, wie er angibt, betrug seine Schmelztemperatur 58°, während bekanntlich reines Kalium bei 62,04° schmilzt.

Ich habe es für zweckmäßig erachtet, mit Hilfe des nebenstehenden Diagrammes (Fig. 2) eine Vorstellung von dem Verlauf des Phänomens für alle von mir untersuchten Alkalimetalle zu geben. In diesem Diagramm stellen die Abszissen die Temperaturen und die Ordinaten den Wärmeverlust in Kalorien dar.

Aus dieser Darstellung lassen sich ohne weiteres die Schlußfolgerungen ziehen, durch die auch für diese Metalle die für alle übrigen Metalle allgemein gemachte Annahme bestätigt wird, daß nämlich die Zunahme ihrer spezifischen Wärme mit der Temperatur um so größer ist, je niedriger ihr Atomgewicht ist.

Bologna, 5. Juni 1906.

(Aus dem Italienischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 28. Januar 1907.)

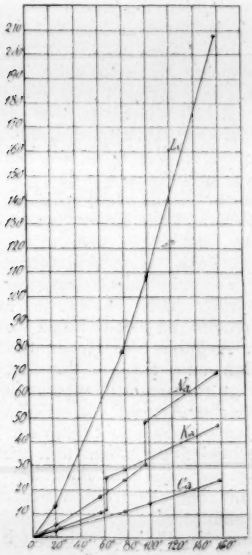


Fig. 2.

Über Entropie bei Körpern, deren Teile nicht im relativen Gleichgewichtszustande befindlich sind.

Von K. v. Wesendonk.

Herr Planck hatte in seinem bekannten Werke über Thermodynamik (S. 88 der 1. Auflage und S. 93 der 2. Auflage) erklärt, man dürfe nicht glauben, daß die Entropie eines Gases nur für Gleichgewichtszustände Bedeutung habe. So gut man in einer beliebig bewegten Gasmenge jedes hinreichend kleine Massenteilchen als homogen und von bestimmter Temperatur annehmen könne, müsse man ihm auch nach Gleichung 52, S. 82 der 1. Auflage einen bestimmten Wert der Entropie zuschreiben. Die Geschwindigkeit der Gasteilchen habe gar keinen Einfluß auf den Wert der Entropie. Hiergegen opponierte im Anschluß an Bertrand Herr Mc. Orr[1]), und Herr Planck[2]) pflichtete ihm dann bis zu einem gewissen Grade bei. In der 2. Auflage der Thermodynamik, S. 93, findet sich denn auch eine Anmerkung, worin es heißt: Wenn die Bewegung des Gases so tumultuarisch ist, daß man Temperatur und Dichte nicht definieren kann, so verliert natürlich auch die hier gegebene Definition der Entropie ihren Sinn. Für diesen Fall läßt sich vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie aus, wie L. Boltzmann gezeigt hat, eine andere Definition der Entropie angeben, welche noch allgemeinere Bedeutung besitzt und für stationäre oder nahezu stationäre Zustände in die gewöhnliche übergeht.

Herr Mc. Orr[3]) ist aber auch hiermit nicht

1) Phil. Mag. (6) **8**, 509—527, 1904.
2) Phil. Mag. (6) **9**, 167—168, 1905.
3) Phil. Mag. (6) **9**, 728—730, 1905.

einverstanden, nur für Ruhezustände soll es einen Sinn haben, von Entropie zu sprechen.

Die Anerkennung der von Herrn Boltzmann vom Standpunkte der kinetischen Gastheorie aus entwickelten Definition der Entropie durch Herrn Planck bezeichnet einen bedeutenden Erfolg für jene Theorie sowohl wie für den genannten hervorragenden österreichischen Forscher, der noch vor einigen Jahren klagte [1]), die Zeitstimmung sei der kinetischen Gastheorie nur wenig günstig. Wie fruchtbar die neue Definition der Entropie ist, das haben ja Herrn Plancks Untersuchungen über die Theorie der Wärmestrahlung [2]) glänzend gezeigt. Es sei hier nur kurz daran erinnert, daß darnach die Entropie S eines einatomigen ideellen Gases sich ergibt [3]) als

$$\varphi = \text{const} - k \int f \log_{\text{nat}} f \, d\sigma,$$

worin f eine Funktion der Koordinaten $x\,y\,z$ und der Komponenten Geschwindigkeit der Moleküle ξ, η, ζ bedeutet, derart, daß $f d\sigma$, worin $d\sigma = d\,x\,dy\,dz\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$ angibt, wie viele Moleküle in dem Elementargebiet $d + dy\,dz$ liegen, deren Geschwindigkeitskomponenten zwischen den Werten ξ und $\xi + d\xi$, η und $\eta + d\eta$ ζ und $\zeta + d\zeta$ liegen. k ist eine Konstante, deren Bedeutung Herr Planck näher beleuchtet.

Herr Boltzmann hat im 1. Teil seiner Vorlesungen über Gastheorie (S. 61 z. B.) bereits 1895 auf die Bedeutung und Tragweite seiner Auffassung der Entropie mit Bestimmtheit hingewiesen. Es heißt da: Wenn man auch die Gastheorie nur als mechanisches Bild gelten läßt, so glaube ich doch, daß gerade diese Auffassung des Entropieprinzips, zu welcher sie geführt hat, allein den Kern der Sache in richtiger Weise trifft. In einer Hinsicht haben wir hier sogar das Entropieprinzip verallgemeinert, indem wir auch die Entropie eines nicht im stationären Zustande befindlichen Gases zu definieren vermögen.

An anderer Stelle (l. c. S. 141) wird dann darauf hingewiesen, wie die neue Definition der Entropie mit der alten von Clausius etc. herrührenden nur so lange übereinstimmt, als gewisse l. c. S. 128 mit No. 147 bezeichnete Gleichungen gelten, die wenigstens bei Annahme der Moleküle als einatomiger Kraftzentren zu dem bekannten Maxwellschen Verteilungsgesetze führen. [4]) Nach den Gleichungen 147 gilt für ein Gemisch zweier Gase $f \times f_1 = f' f_1'$, $F \times F_1 = F' \times F_1'$, $f \times F_1 = f' \times F_1'$, wo die f- und F-Funktionen, wie das oben erwähnte f bezeichnen, und zwar gelten die ungestrichenen Größen für den Zustand der Moleküle vor einem Zusammenstoße, die gestrichenen dagegen nach einem solchen, die Größen ohne Index beziehen sich auf eine, die mit dem Index 1 auf eine zweite Geschwindigkeit, die f gelten für das eine, die F für das zweite Gas des Gemisches. Solange der Zustand des Gases den genannten Forderungen entspricht, bringt eine Bewegung desselben oder die Wirkung äußerer Kräfte keine Verschiedenheit in die beiden Auffassungen der Entropie hinein (vergl. l. c. S. 139). Es gilt dann für die Entropie des Gases der bekannte Ausdruck:

$$\int \frac{R\,dm}{\mu} \log_{\text{nat}} (\varrho^{-1} T^{3/2}) + \text{const.},$$

wo T die absolute Temperatur, dm die Masse eines Elementes des Gases, μ das sogenannte Molekulargewicht desselben, ϱ seine Dichte und R die sogenannte Gaskonstante bedeutet. Sobald aber Reibung und Wärmeleitung nicht mehr zu vernachlässigen sind, kann man die genannte Gleichung nicht mehr streng anwenden, kein allseitig gleicher Druck p darf dann mehr in dem Gase angenommen werden. [1]) Bezeichnet (l. c. S. 142) $\xi = u + \mathfrak{x}$, $\eta = v + \mathfrak{y}$, $\zeta = w + \mathfrak{z}$ die Geschwindigkeitskomponenten eines in dem Volumenelemente $d\sigma$ enthaltenen Moleküles, sodaß $\xi = u$, $\eta = v$, $\zeta = w$ ist, (wo $\bar{g}$ den Mittelwert der Größe g bezeichnet) und also $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{z}} = 0$ ist, so gilt, so lange Gleichung 147 und damit das Maxwellsche Verteilungsgesetz besteht, $\bar{\mathfrak{x}}^2 = \bar{\mathfrak{y}}^2 = \bar{\mathfrak{z}}^2$ und $\bar{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} = \bar{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} = 0$.

Diese Gleichungen verlieren aber ihre Geltung, wenn Reibung und Wärmeleitung eintritt. Man muß dann statt des hydrostatischen allseitig gleichen Druckes p wie bei einem elastischen Systeme die Druckkräfte Xx, Yy, Zz, Xy, Yz, Zx nach Kirchhoffs [2]) bekannter Bezeichnung einführen in die mathematische Betrachtung der bewegten Gase, und zwar hat man zu setzen nach Maxwell und Boltzmann $\varrho \bar{\mathfrak{x}}^2 = Xx$, $\varrho \bar{\mathfrak{y}}^2 = Xy$, $\varrho \bar{\mathfrak{z}}^2 = Zz$, $\varrho \bar{\mathfrak{y}} \cdot \bar{\mathfrak{z}} = Yz$, $\varrho \bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{x}} = Zx$, $\varrho \bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{y}} = Xy$. Die Molekularbewegung ruft den Schein solcher Molekularkräfte (elastischer Kräfte), wie Boltzmann sagt, hervor, sie werden auf solche Weise dynamisch erklärt.

In bewegten Gasen ist also darnach weder der Druck nach allen Richtungen hin exakt derselbe, noch auch exakt normal zur gedrückten Fläche anzunehmen. [3]) Boltzmann führt nun für den Fall, daß die Abweichungen von dem Zustande, wie er den Gleichungen 147 etc.

1) Man sehe das Vorwort zu Teil II der Gastheorie 1898
2) Leipzig 1906, bei Joh. Ambr. Barth.
3) Planck, l. c., S. 144.
4) l. c. S. 131, Gleichungen 134 u. 155. Gastheorie II., S. 229, Gleichung 266, ferner S. 235.

1) Vergl. Kirchhoff, Vorlesungen über Wärmetheorie. Herausgegeben von Planck. S. 115, 165 u. 193; Leipzig, B. G. Teubner. 1894. Boltzmann, Gastheorie I., S. 146.
2) l. c. S. 115.
3) Boltzmann, Gastheorie I., S. 147.

entspricht, nur gering sind, die Größen $\overline{\mathfrak{x}^2}$, $\overline{\mathfrak{y}^2}$, $\overline{\mathfrak{z}^2}$ also nur wenig voneinander verschieden und $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$, $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}$, $\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}$ nur wenig vom Werte Null entfernt sind, aber doch innere Reibung und Wärmeleitung im Gase merklich auftreten, eine annäherungsweise Berechnung der Entropie für ein Volumenelement $d\,o$ durch (l. c. S. 190) und gelangt dafür zu dem (S. 192) gegebenen Ausdrucke:

$$\mathcal{J}\,do = \frac{R\varrho\,do}{2\mu}\log_{\mathrm{nat}}(T^{\gamma}\varrho^{-1}) - \frac{4\mathfrak{R}^2K^3T^2\varrho\,do}{p^2\mu^3}$$
$$\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\right.\right.$$
$$+\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{5\cdot7\cdot9}{64}\frac{\mu}{RT^3}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right]\right\}.$$

Hierin bedeuten u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten für das Element $d\,o$, die übrigen Größen haben die früher angegebene Bedeutung. Das letzte Glied des Ausdruckes bezieht sich dabei auf Wärmeleitung. Durch die Dissipation der Energie, welche innere Reibung und Wärmeleitung verursachen, wird also, wie man sieht, die Entropie verkleinert, und Boltzmann fügt S. 193 einige sehr beachtenswerte Bemerkungen hinzu. Es handle sich hier um eine der Energetik fremde Energieart, die zwischen lebendiger Kraft und Wärme die Mitte halte, indem eine lebendige Kraft auftrete, welche halb noch als sichtbare kinetische Energie anzusehen, halb schon in Wärmebewegung übergegangen sei, ein Teil davon lasse sich noch in Arbeit verwandeln. Sie gehe in den Ausdruck der Entropie in einer Weise ein, die aus den Gesetzen der statischen Erscheinungen nicht habe vorausgesehen werden können, das Prinzip der Superposition der Energien gelte nicht mehr. Erzeugen wir durch äußere Kräfte innere Reibung, so verwandelt sich die dabei aufgewandte Arbeit erst eine längere Zeit, nachdem die Kräfte aufgehört haben zu wirken, vollständig in Wärme, bis dahin falle die Entropie kleiner aus, als wenn die für die sichtbare Bewegung verloren gegangene Energie gewöhnliche Wärme wäre.

Die bisherigen Betrachtungen Boltzmanns beziehen sich auf einatomige Gase, doch hat Boltzmann im zweiten Teile seiner Gastheorie die den Gleichungen 147 [1]) entsprechenden Gleichungen nachzuweisen gesucht, aus welchen sich jedoch nicht mehr die Notwendigkeit des von ihm eingeführten erweiterten Maxwellschen Verteilungsgesetzes (l. c. S. 108, Gleichung 115) allgemein folgern läßt. Nach alledem versagt denn also der gewöhnliche Entropiebegriff nicht erst bei stark turbulenten Bewegungen, sondern so oft relative Bewegungen verschiedener Teile eines Gases, die ja praktisch stets mit Reibung verlaufen, und Temperaturdifferenzen innerhalb des Gases eintreten.

Herr Voigt bespricht in seiner trefflichen Thermodynamik auch den Fall von Körpern, deren Teile in relativer Bewegung begriffen sind und Temperaturdifferenzen aufweisen. Es heißt da Bd. 1, S. 290: Auch der Fall bewegter Körper lasse sich in die thermodynamische Betrachtungen von Substanzen, bei denen die inneren Zustände örtlich stetig variieren, einbeziehen, wenn nach Beseitigung der Schwerpunkts- und Rotationsgeschwindigkeit eines jeden Volumenelementes in demselben nur unendlich kleine Deformationsgeschwindigkeiten zurückbleiben, die Elemente also in ihrem inneren Verhalten sich nur unmerklich von solchen entfernen, welche im Gleichgewichte befindlich sind. In ähnlicher Weise wird auch der Vorgang der Wärmeleitung und Strahlung (S. 340) in die thermodynamische Betrachtung einbezogen. Es ist aber, wie man sieht, nur eine angenäherte Behandlung, zu welcher man auf diese Weise gelangt, und es würde also, streng genommen, in allen Fällen solcher innerer Bewegungen einer Substanz die übliche Bestimmung der Entropie versagen und dann etwa durch die Boltzmannsche Wahrscheinlichkeitsgröße zu ersetzen sein. Indessen, so bedeutend man des österreichischen Physikers Verdienste in dieser Richtung auch anschlagen mag, so ist doch nicht zu verkennen, daß die kinetische Gastheorie manch Hypothetisches noch immer enthält. Schon im Falle einatomiger Kraftzentrenmoleküle werden die Betrachtungen sehr verwickelt. Boltzmanns oben erwähnter Ausdruck für die Entropie ist nicht durch eine strenge Integration gewonnen, sondern durch ein bloßes Näherungsverfahren [1]), bei flüssigen und elastischen Systemen fehlt zurzeit noch fast jeder Anhaltspunkt. Da lohnt es sich denn doch wohl, noch einmal näher nachzusehen, ob denn die altbewährte Definition der Entropie wirklich so gänzlich versagt, in Fällen, wie sie innerlich bewegte Systeme darbieten. Verfasser schrieb vor kurzem in der Physikalischen Zeitschrift Jahrgang 6, S. 50—52, 1905, gegen Mc. Orr folgendes: Verfasser kann sich ferner den Einwänden Herrn Mc. Orrs gegen die Annahme, auch bei irreversibeln Prozessen besitze jedes Element des arbeitenden Systems einen bestimmten Entropiewert, nicht anschließen. Kennt man in solchen Fällen auch nicht immer die Werte und Verteilung des Druckes z. B.,

1) Gastheorie II., S. 229, Gleich. 266; ferner S. 235.

1) Man vergleiche Weinsteins Bemerkungen in seiner Thermodynamik und Kinetik etc. Bd. I, S. 305—313, 1901. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn.

so befindet sich doch jedes Element der zu betrachtenden Substanz in jedem Momente in einem ganz bestimmten Zustande. Kann man diesen umkehrbar erreichen, so erscheint auch die Entropie des betreffenden Elementes für den entsprechenden Augenblick angebbar. Man rechnet ja in verschiedenen Teilen der Physik mit Körperelementen, ohne auf Schwierigkeiten bedenklicher Art zu stoßen, resp. mit den Molekulartheorien gefährlich zu kollidieren.

An dieser Auffassung glaubt Verfasser auch zurzeit noch festhalten zu sollen. Die Entropie ist allerdings nur durch Betrachtung von Gleichgewichtszuständen zu bestimmen, hat nur für solche einen Sinn. Die Wärmemenge dQ in dem bekannten Integrale $\int \frac{dQ}{T}$ ist stets als von außen zugeführt anzusehen.[1]) Um nun die Entropie eines Elementes eines innerlich bewegten Systemes zu berechnen, braucht man aber nicht den in Wirklichkeit vorliegenden Prozeß in eine Folge von Gleichgewichtszuständen zu verwandeln. Man hat nur daran zu denken, daß, wie schon oben bemerkt, jedes Teilchen eines irgendwie veränderlichen Systems (nach Abzug der Schwerpunkts- und Rotationsgeschwindigkeiten) in jedem Momente in seinem inneren Zustande eindeutig bestimmt sein muß und diesen inneren Zustand muß man sich durch geeignete Kräfte festgehalten denken. Einem solchen Element, welches ja, wie Boltzmann wiederholt darlegt[2]), stets auch nach der kinetischen Gastheorie eine sehr große Zahl von Molekülen enthalten muß, ist dann auch eine bestimmte Temperatur beizulegen, jedenfalls, wenn auch ein Temperaturgefälle im Innern des Körpers vorhanden ist, eine für die Entropieberechnung ausreichende mittlere Temperatur, da ja Temperaturunterschiede innerhalb eines Elementes nur sehr klein sein können.[3]) Wenn man sich solche Elemente, mit den das Gleichgewicht bewirkenden Kräften ausgestattet, ohne Energieaufwand zusammengelegt denkt zu einer endlichen Masse, so erhielt man für diese doch jedenfalls einen bestimmten Wert der Temperatur.[1])

Nun braucht man nur den inneren Momentanzustand eines Elementes, sowie er durch passend eingeführte Kräfte fixiert erscheint, in umkehrbarer Weise von einem Normalzustande aus erreichen zu können, um die Möglichkeit der Entropieberechnung des betreffendes Elementes für den gegebenen Moment zu erhalten. Bei einem Gase, auf das Reibung und Wärmeleitung druckändernd einwirken, hat man dann das betreffende Element in einem Spannungszustande sich fixiert zu denken, wie er einem elastisch deformierten Körper entspricht, bei dem also an Stelle eines allseitig gleichen Normaldruckes p die bereits erwähnten Spannungen Xx, Yy, Zz, Xy, Yz, Zx einzuführen sind. Ein solches Verhalten geht ja doch nicht lediglich aus der kinetischen Gastheorie hervor, indem diese aus dem Nichtverschwinden der Größen $(\varrho\,\overline{\xi^2} - p)$ etc., $\overline{\xi\eta}$ etc. zu solcher Auffassung gelangte. Kirchhoff (l. c. S. 115) hat ja die gewöhnlichen Gleichungen der Hydrodynamik ohne kinetische Betrachtungen erweitert, so daß sie in weiterer Annäherung auch Reibung und Wärmeleitung umfassen und gelangt so direkt zu Gleichungen für die Spannungen im Gase wie

$$Xx = p - 2\varrho\frac{\partial u}{\partial x} + 2\varrho'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \text{ etc.}$$

$$Xy = -\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Wenn man auch nichts von kinetischer Gastheorie wüßte, so gelangte man doch wohl im Anschluß an Kirchhoff zu der soeben dargelegten Auffassung der Entropie, nur kann man natürlich nicht den Bewegungszustand, selbst des Gases, in einen Gleichgewichtszustand verwandeln, dann wäre ja keine Reibung etc. mehr vorhanden und es würde gelten $Xx = p$ etc. und $Xy = 0$ etc., wohl aber kann man, wie gesagt, sich den Zustand, in dem in einem gegebenen Momente sich ein Element gerade befindet, durch geeignete Kräfte fixiert denken. Betrachtet doch Kirchhoff selbst einen starren

1) Dies ist zu betonen, damit nicht Darlegungen, wie die von J. J. van Laar (Thermodynamisches Potential. Braunschweig, 1906, S. 39) zu irrtümlichen Auffassungen führen.

2) Gastheorie I., S. 46—47.

Gastheorie II., S. 111—115. Streng unendlich klein können in der kinetischen Betrachtung die Elemente nicht genommen werden. Wieweit die sogen. beschreibende Theorie in der Annahme gegen unendlich klein hin konvergierender Elemente gehen kann, ohne in Widerspruch mit den Tatsachen zu geraten, ist noch nicht ausgemacht, auch nicht, ob überhaupt eine solche Grenze vorhanden. Schwierigkeiten dürfte in mancher Hinsicht ein sehr hohes Vakuum beiden Arten der Betrachtung darbieten.

3) Wirkliche Temperatursprünge im streng mathematischen Sinne sind in der Natur doch wohl als ausgeschlossen anzusehen. Es kann sich nur um sehr schnelle Änderungen handeln, auch bei dem in der Wärmeleitung verdünnter Gase theoretisch wie experimentell gefolgerten Temperatursprunge. In einem genügend kleinen Elemente können also nur entsprechend kleine Temperaturunterschiede auftreten, zumal ja bei unseren Betrachtungen es sich doch wesentlich um Elemente im Innern der Gasmasse handelt. Der Übergang von einer festen Wand zum Gase, von einem Körper zu einem anderen überhaupt, kann, worin man Herrn Drude gern beistimmen wird, auch nur stetig erfolgen.

1) Der Umstand, daß das Element eine Gesamtbewegung besitzt, hat erfahrungsgemäß keinen Einfluß auf seine Temperatur, wie Beobachtungen in einem Eisenbahnzuge etc. ergaben; über außerordentlich große Geschwindigkeiten liegen allerdings wohl keine Erfahrungen vor.

Bringt man das erwähnte Element resp. die erhaltene endliche Masse in Berührung mit Körpern von bestimmter Temperatur, so müssen sich doch wohl solche finden, mit denen kein Wärmeaustausch statthat, und darauf kommt es ja in der Thermodynamik wesentlich an. Mangelhafter Ausgleich der Translationsgeschwindigkeit der Moleküle mit deren innerer Bewegung mag Schwierigkeiten bereiten für die Theorie, aber eventuell auch schon bei Systemen, die praktisch im Ruhezustande befindlich.

Körper als eine Flüssigkeit, bei welcher der Koeffizient der inneren Reibung unendlich wird. Man muß also die Entropie eines Gases, dessen Teile in relativer Bewegung befindlich und von ungleicher Temperatur sind, wie die eines elastischen Systemes berechnen. Bedeutet U die innere Energie, T die absolute Temperatur, S die Entropie, p den Druck und v das Volumen eines Gases im gewöhnlichen Zustande, Q eine dem Gase von außen zugeführte Wärmemenge, so ist für gewöhnlich bekanntlich bei einem umkehrbaren Prozesse $\frac{dQ}{T} = dS = \frac{dU + p\,dv}{T}$ das Entropieelement.

Hier ist p nach dem Innern des Elementes im Gase wirkend als positiv gerechnet, und die bei Volumenvermehrung von dem Systeme geleistete Arbeit als positiv angenommen. Im Falle der Reibung und Wärmeleitung müssen dagegen, wenn man ein prismatisches Element dx, dy, dz des Gases betrachtet, statt des Volumens allein 6 Größen zur Charakterisierung der räumlichen Verhältnisse berücksichtigt werden, nämlich die Verlängerungen der 3 Kanten und die Verschiebungen der 3 Winkel.[1]) Bezeichnet man diese 6 Verschiebungsgrößen mit x, y_y, z_z, x_y, y_z, z_x, so erhält man unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen für die entsprechenden Spannungen (statt $p\,dv$) für die gesamte äußere Arbeit des Elementes $dx\,dy\,dz$ den Ausdruck:

$$dx\,dy\,dz\,(X_x\,dx_x + Y_y\,dy_y + Z_z\,dz_z + X_y\,dx_y + Y_z\,dy_z + XZ_x\,dz_x).$$

Da die Spannungen Xx, Yy, Zz, wie man aus Kirchhoffs oben wiedergegebenen Ausdrücken sieht, zumeist kleiner als das der gleichen Temperatur entsprechende statische p sind, außerdem die Xy etc. negativ ausfallen, so wird auch die Entropie entsprechend sich als kleiner ergeben als für den Ruhezustand, was mit Boltzmanns Angaben übereinstimmt. Es ist nämlich $dx_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,dt$ etc. $dx_y = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dt$ etc., beachtet man ferner, daß $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt$ die sog. räumliche Dilatation darstellt, so ergibt obiger Ausdruck für die gesamte elementare, äußere Arbeit[1]):

$$\left\{\frac{p}{dx\,dy\,dz}\frac{dv_0}{dt} - 2\varrho\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right| - \varrho\left|\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right| + 2\varrho'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} dx\,dy\,dz \cdot dt.$$

dv_0 bedeutet die Volumzunahme des Elementes $dx\,dy\,dz$ während des Zeitelementes dt. Ohne den Nachweis, daß man auf solchem oder ähnlichem Wege nicht zum Ziele gelangen kann, dürfte es nicht geraten erscheinen, die alte Definition der Entropie für innerlich bewegte etc. Systeme aufzugeben.

1) Man sehe die treffliche Darstellung bei Riecke, Wied. Ann. **49**, 432, 1893; **53**, 574, 1894; ferner Voigt, Thermodynamik, Bd. I, S. 270, 1903. Statt der virtuellen Verschiebung dx, dy, dz ist nach Kirchhoff bei bewegten Gasen zu setzen $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$, d. h. die wirklichen Verschiebungen während des Zeitelementes dt.

1) Vergl. Kirchhoff, l. c. S. 117 u. 118.

Berlin, 3. Februar 1907.

(Eingegangen 4. Februar 1907.)

BESPRECHUNGEN.

Groth, P., Physikalische Kristallographie und Einleitung in die kristallographische Kenntnis der wichtigsten Substanzen. Vierte, neubearbeitete Auflage. Lex. 8. XIV u. 820 S. mit 750 Abbildungen im Text und 3 Buntdrucktafeln. Leipzig, Wilhelm Engelmann. 1905. M. 19.—, gebunden M. 22.—.

Dieses vortreffliche Lehrbuch, das jedem, der sich eingehender mit Kristallographie beschäftigt, zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel beim Studium derselben geworden ist, liegt nun bereits in 4. Auflage vor. In seinen wesentlichen Grundzügen ist dasselbe gegenüber der 3. Auflage unverändert geblieben. Nur in der I. Abteilung (allgemeine physikalische Kristallographie) ist eine schärfere Gruppierung der einzelnen Abschnitte durchgeführt worden, infolgedessen einzelne Kapitel gegen früher umgestellt werden mußten.

Die I. Abteilung behandelt jetzt:

A. Bivektorielle Eigenschaften von höherer Symmetrie (Ellipsoideigenschaften):
   1. optische,
   2. thermische,
   3. magnetische und elektrische Eigenschaften,
   4. homogene Deformationen.

B. Bivektorielle Eigenschaften von niederer Symmetrie:
   1. Kohäsion (Spaltbarkeit),
   2. Elastizitätseigenschaften.

C. Vektorielle Eigenschaften.
   Polare Pyro- und Piezoelektrizität, Härte und Gleitung,

Auflösung und Wachstum,
Kristallstruktur,
Rationalitäts- und Zonengesetz,
Symmetrie.

Wesentlich neu bearbeitet sind in dieser I. Abteilung die Abschnitte über homogene Deformationen und über Kohäsion, ebenso diejenigen über die Auflösung und das Wachstum der Kristalle. Das Rationalitäts- und Zonengesetz wird nicht mehr wie früher in der II. Abteilung als Erfahrungsgesetz behandelt, sondern aus der Theorie der Kristallstruktur abgeleitet.

Die II. Abteilung (spezielle physikalische Kristallographie) umfaßt die systematische Beschreibung der Kristalle in derselben Form, wie sie in der 3. Auflage zum ersten Male angewandt wurde. Die damals neu eingeführte Bezeichnung der 32 Kristallklassen ist beibehalten worden. Bei der Beschreibung der Beispiele der einzelnen Symmetrieklassen ist die in der 3. Auflage angewandte Schreibweise der chemischen Formeln für die kristallisierten Elemente wie z. B. für Diamant C^n, für Phosphor $(P)^x$ usw. nunmehr weggelassen worden.

An die II. Abteilung schließt sich ein Anhang: Vergleichungstabelle der Systematik, Nomenklatur und Bezeichnung der Kristallformen von Miller, Weiß, Naumann und Lévy. Neu ist eine tabellarische Darstellung der Beziehungen zwischen den kubisch-hexakisoktaedrischen und den ditrigonal-skalenoedrischen Formen.

Die III. Abteilung (angewandte physikalische Kristallographie) enthält die Methoden zur Untersuchung der Kristalle. Neu ist hier ein Abschnitt über die graphische Berechnung nach den Methoden von Fedorow, Wulff und Penfield. Bezüglich der für kristallographische Untersuchungen bestimmten Apparate weist der Verfasser in seinem Vorwort wohl mit Recht darauf hin, „daß die wachsende Komplikation der Instrumente keinen durchweg zu begrüßenden Fortschritt in der Wissenschaft bedeutet."

Dem Buche sind wie früher 3 Buntdrucktafeln beigegeben, die das Spektrum, die Newtonsche Farbenskala von 1.—4. Ordnung, eine Reihe Interferenzbilder optisch einachsiger und zweiachsiger Kristalle und Abbildungen von elektrisch erregten und nach der Kundtschen Methode bestäubten Kristallen zeigen. Die beiden ersten Tafeln hiervon sind neu hergestellt worden und bedeuten in ihrer Ausführung einen Fortschritt gegen früher. Angebracht wäre wohl eine Erläuterung der einzelnen Figuren unmittelbar bei den Tafeln selbst.

J. Soellner.

(Eingegangen 20. November 1906.)

O. D. Chwolson, Traité de Physique. Ouvrage traduit sur les éditions Russe et Allemande par E. Davaux. Edition revue et considérablement augmentée par l'auteur, suivie de notes sur la Physique théorique par E. Cosserat et F. Cosserat. 8. — Tome Premier, Second Fascicule: L'état gazeux des corps (chapitre II, refondu par Mr. Amagat). Avec 60 figures dans le texte. 6 Frcs. — Tome Deuxième, Second Fascicule: L'indice de réfraction. Dispersion et transformations de l'énergie rayonnante, avec une note de M. de Gramont. Avec 157 figures dans le texte. — VI + 151 und VIII + 229 S. 10 Frcs. — Paris, A. Hermann. 1906.

Über die beiden mir vorliegenden Hefte der französischen Ausgabe des Lehrbuches von Chwolson den Lesern dieser Zeitschrift zu berichten, scheint mir kein Anlaß vorzuliegen, da wir eine gute deutsche Ausgabe des vorzüglichen Werkes besitzen. Ein Zeichen für die Vortrefflichkeit der deutschen Ausgabe ist meines Erachtens schon darin zu erblicken, daß sie der französischen mit zugrunde gelegt worden ist.

Max Iklé.

(Eingegangen 23. November 1906.)

Annalen der Elektrotechnik für das Jahr 1906. Monatsberichte über sämtliche Gebiete der elektrotechnischen Wissenschaft und Praxis. Herausgegeben von Fritz Hoppe und E. R. Ritter. Leipzig, Johann Ambrosius Barth. 1906. Abonnementspreis für den aus 12 Heften bestehenden Jahrgang M. 15.—, von 1907 ab M. 22.—.

Von dieser neuen Zeitschrift liegen mir die ersten drei Hefte vor. Der Zweck des Unternehmens ist, den in der Praxis stehenden Ingenieur über alle Vorgänge auf dem Gebiete der Elektrotechnik möglichst auf dem Laufenden zu erhalten. Das soll geschehen einerseits durch möglichst schnell erscheinende „Monatsberichte" über den Inhalt der wichtigsten Veröffentlichungen des In- und Auslandes (erster Teil), zweitens durch „Literaturnachweis, Bücherschau und Fragekasten" (zweiter Teil). Daß für eine derartige Zeitschrift ein lebhaftes Bedürfnis vorliegt, dürfte kaum zu bestreiten sein. Hoffentlich gelingt es der neuen Zeitschrift, diese Lücke auszufüllen.

Max Iklé.

(Eingegangen 23. November 1906.)

E. Bouty, Troisième Supplément au Cours de Physique de l'Ecole Polytechnique par M. J. Jamin. — Radiations-Electricité-Ionisation. VI + 419 S. 8. — Paris, Gauthier-Villars. 1906. 8 Frcs.

Dieser Ergänzungsband zu dem Lehrbuch von Jamin umfaßt die Ergebnisse der letzten 6 Jahre. Vielfach stützt sich die Darstellung

auf die Rapports au Congrès International de Physique vom Jahre 1900. Für einen deutschen Leserkreis kommt das Buch wohl kaum in Betracht, da es uns an guten deutschen Lehrbüchern der Physik, in denen die neuesten Errungenschaften unserer Wissenschaft Berücksichtigung gefunden haben, keineswegs fehlt. Etwas sonderbar berührt es, im dritten Kapitel „Spectre infra-rouge. — Dispersion", die Unterabteilungen „Rayons de Schumann. — Rayons N. — Rayons restants" zu finden.

Max Iklé.

(Eingegangen 23. November 1906.)

S. P. Thompson, Die dynamoelektrischen Maschinen. Ein Handbuch für Studierende der Elektrotechnik. 7. vollständig umgearbeitete u. stark vermehrte Auflage. Übersetzt v. K. Strecker u. F. Vesper. In 2 Bänden von zus. 22 Heften. Heft 1. gr. 8. 64 S. mit 41 Figuren und 3 Tafeln. Halle a. S., Wilh. Knapp. 1906. à Heft M. 2,—.

Der wesentlichste Teil des vorliegenden ersten Heftes der neuen Auflage dieses rühmlichst bekannten Werkes ist der Geschichte der Dynamomaschine gewidmet, die knapp aber meisterhaft geschildert ist. Ein vorzügliches Literaturverzeichnis, das die Arbeiten in- und ausländischer Forscher gleichmäßig berücksichtigt, erhöht noch den Wert des Werkes.

R. Rüdenberg.

(Eingegangen 2. Dezember 1906.)

W. Bermbach, Der elektrische Strom und seine wichtigsten Anwendungen. Gemeinverständliche Darstellung. 3. umgearbeitete und stark vermehrte Auflage. 8. VIII u. 445 S. mit 237 Abbildungen. Leipzig, O. Wigand. 1906. M. 12,—.

Das Ziel des Buches, auf knapp 500 Seiten die gesamten Erscheinungen der Elektrizität darzustellen, ist kein leichtes. Natürlich kann der Verfasser keine Untersuchungen über Einzelprobleme anstellen, sondern muß sich mit kurzen Beschreibungen begnügen. Der Stoff ist reichhaltig und leicht verständlich vorgetragen.

R. Rüdenberg.

(Eingegangen 2. Dezember 1906.)

A. Still, Polyphase currents. 8. VIII u. 352 S. mit 95 Figuren. London E. C. 2, White Hart Street, Paternoster Square, Whittaker & Co. 1906. Gebunden 6 sh.

Unter vollständiger Vermeidung analytischer Erörterungen gibt dies Buch einen vortrefflichen Überblick über das Wesen und die Anwendung der Wechselstromerscheinungen, insbesondere der mehrphasigen Ströme. Die Darstellung ist klar, und kann besonders denjenigen empfohlen werden, die sich ohne tiefergreifendes Studium über die Wirkungsweise von Drehstromanlagen orientieren wollen.

R. Rüdenberg.

(Eingegangen 2. Dezember 1906.)

Berichtigung.

In meinem Aufsatz in dieser Zeitschrift **8**, 107, 1907: „Über die Radioaktivität einiger Süßwasserquellen des Taunus III., bitte ich nachstehende Druckfehler zu beachten:

Seite 107, erste Spalte, Zeile 17 von oben:
lies 1 Coul. $= 3 \cdot 10^9$ cm$^{3/2}$ g$^{1/2}$ sec^{-1} anstatt
1 Coul. $= 3 \cdot 10^9$ cm$^{3/2}$ g$^{1/2}$ sec^{-1},

Seite 108, erste Spalte, Zeile 16 von oben:
lies $A = A_0 + \frac{A_0}{100} \cdot R$ anstatt $A = A + \frac{A_0}{100} \cdot R$,

Seite 110, zweite Spalte, Zeile 9 von unten:
lies desjenigen, anstatt derjenigen.

Seite 111, zweite Spalte, Zeile 24 von oben:
lies desjenigen, anstatt derjenigen.

August Schmidt.

Personalien.

Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Bern Frl. Dr. Gertrud Woker für Geschichte der Physik und Chemie, an der Universität Leipzig Dr. Johannes Scheiber für Chemie, an der Universität Straßburg Dr. H. Staudinger für Chemie.

Ernannt: Dr. Larquier zum a. o. Professor für Experimentalphysik an der Universität Lausanne, der a. o. Professor der chemischen Technologie an der Technischen Hochschule in Lemberg Dr. V. Syniewski zum o. Professor an derselben Hochschule, der Landesschulinspektor für Mähren Regierungsrat Vinzenz Jarolinek zum o. Professor der darstellenden Geometrie an der Böhmischen Technischen Hochschule in Prag, der Direktor des Blue Hill Meteorological Observatory A. Lawrence Rotch zum Professor der Meteorologie an der Harvard-University in Cambridge (Mass.).

Berufen: An die biologische Anstalt für Land- und Forstwirtschaft in Dahlem bei Berlin der a. o. Professor der Chemie an der Universität Straßburg Dr. E. Erlenmeyer, Professor Giuseppe Plancher in Bologna als Professor für allgemeine Chemie an die Universität Parma, Dr. William A. Noyes, Vorstand des chemischen Departements bei dem Bureau of Standards in Washington und Sekretär der Amer. Chemical Society als Professor der Chemie an die Universität von Illinois in Champaign.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Technik der künstlichen Farbstoffe an der Technischen Hochschule in Berlin Dr. Fritz Ullmann der Titel eines a. o. Professors.

In den Ruhestand: Der o. Professor der Physik an der Universität von Colorado Dr. William Duane (um eine Anstellung an dem Curie-Radium-Laboratorium in Paris anzunehmen), am 1. April der o. Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Braunschweig Dr. Karl Koppe (aus Gesundheitsrücksichten), der ord. Professor für technische Mechanik an der Technischen Hochschule zu Stuttgart Baudirektor Edmund von Autenrieth.

Gestorben: Der o. Professor der Physik und Meteorologie an der Universität Berlin und Direktor des Meteorologischen Instituts Dr. Wilhelm von Bezold, der o. Professor der Chemie an der Universität Amsterdam Dr. H. de Bakhuis-Roozeboom, in London die astronomische Schriftstellerin Miß Agnes Mary Clerke, der o. Professor der Chemie an der Universität Paris Dr. Henri Moissan, der frühere Direktor des Government Observatory in Sydney Dr. H. C. Russell.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Emil Bose in Oliva bei Danzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.